# PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 17. 1. September 1920. 21. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 19 am 24. August 1920.


INHALT:


**Originalmitteilungen:**

E. Waetzmann, Experimentelles zum Schalldruck. S. 449.

A. H. Bucherer, Die Rotverschiebung der Sonnenlinien. S. 451.

G. Kirsch, Notiz zur Geiger-Nuttallschen Gleichung. S. 452.

R. Mollier, Eine graphische Darstellung der Zustandsgleichung. S. 457.

O. Oldenberg, Ein Schwingungsapparat für Vorlesung und Praktikum nach H. Th. Simon. S. 463.

P. C. v. Arkel, Die Anwendung der Smoluchowskischen Theorie auf die zeitliche Veränderlichkeit der Teilchenzahl einer Emulsion. S. 465.

P. Terpstra, Die Energieverhältnisse in einem Stromkreise mit Selbstinduktion. S. 467.

**Zusammenfassende Bearbeitungen:**

H. Spohn, Neuere Arbeiten über Beugung an Zylindern und Gittern. (Fortsetzung.) S. 469.

**Tagesereignisse.** S. 472.

**Personalien.** S. 472.


## ORIGINALMITTEILUNGEN.

### Experimentelles zum Schalldruck.


Von E. Waetzmann.


Als experimentelle Ergänzung zu der Mitteilung[1]) des Verfassers „Theoretisches über den Schalldruck“ wird im folgenden ein Versuch beschrieben, welcher die früheren theoretischen Ausführungen bestätigt. Die Anordnung des Versuches ist so einfach gehalten, und der beobachtete Effekt ist so stark, daß sich der Versuch auch als Demonstrationsversuch eignet.

Verf. hatte gezeigt, daß die gleichen Bedingungen, welche das Auftreten von Schalldruck veranlassen, zugleich die Ursache für die Entstehung neuer, von der Schallquelle noch nicht gegebener Töne sind. Besonders einfach war zu übersehen, daß ein Differenzton (D. T.) $p-q$ entstehen muß, wenn die Schallquelle primär zwei Sinusschwingungen mit den Schwingungszahlen $p$ und $q$ liefert, welche Schwebungen bilden. Als Schallquelle sollen beispielsweise zwei Stimmgabeln $p$ und $q$ dienen. Sie wirken auf eine schwingungsfähige Platte, welche für sich linearem Kraft- und Dämpfungsgesetz gehorche. Trotzdem zeigt die Platte einen D. T. $p-q$ an, wenn die Verhältnisse im einzelnen so liegen, daß der Schalldruck merklichen Einfluß erhält. Das Auftreten dieses D. T. soll der im folgenden beschriebene Versuch beweisen.

Das prinzipiell Wichtige desselben tritt besonders deutlich hervor, wenn die Schwebungen so langsam gewählt werden, daß man einerseits die Stöße hört und andererseits die objektive Schwingung $p-q$ beobachtet. Letzteres ist direkt ohne jede Analyse der Gesamtschwingung des erregten Körpers möglich, wenn derselbe auf die schnellen Schwingungen $p$ und $q$ überhaupt nicht reagiert, sondern nur die langsame Schwingung $p-q$ anzeigt. Durch diese Forderungen sind die günstigsten Bedingungen für die Ausführung des Versuches festgelegt.

Zunächst ist darauf zu achten, daß der schwingungsfähige Körper, welcher den D. T. anzeigen soll, für sich linearen Gesetzen gehorcht. Andernfalls könnte gemäß der Helmholtzschen Theorie in ihm ein D. T. entstehen, der mit dem Schalldruck nichts zu tun hat. Bei verschiedenen Versuchsanordnungen trat diese Schwierigkeit auf. Es wurde deshalb als Druckanzeiger ein Manometer gewählt, wie es schon vielfach zur Messung des konstanten Überdruckes[1]) in Kundtschen Röhren, Resonanzkästen von Stimmgabeln usw. benutzt worden ist. In einem horizontal liegenden Glasrohr von wenigen Millimetern Durchmesser befindet sich ein kurzer Flüssigkeitsfaden (Alkohol). Wird das Rohr ein wenig durchgebogen, so daß die beiden Schenkel einen stumpfen Winkel miteinander bilden, so ist die Empfindlichkeit immer noch genügend groß, und außerdem besitzt jetzt der Alkoholfaden eine, wenn auch sehr langsame, Eigenperiode. Er folgt für sich weitgehend linearen Schwingungsgesetzen und hat ferner die für unsere Zwecke erwünschte Eigenschaft, nur langsame Druckschwankungen anzuzeigen.

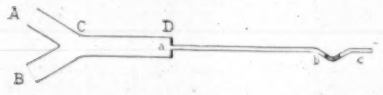
Um keine besonderen Hilfsmittel für den Versuch zu brauchen, wollen wir als Tonquelle zwei Stimmgabeln auf Resonanzkästen mit den Schwingungszahlen 256 wählen. Die eine Gabel kann durch ein Laufgewicht verstimmt werden. Zwei derartige Stimmgabeln sind wohl in jedem Institut vorrätig. An sich sind natürlich konstant tönende Tonquellen vorzuziehen. Außerdem ist eine größere Höhe derselben vorteilhaft, da die Größe des Schalldruckes pro-

1) E. Waetzmann, diese Zeitschr. **21**, 122 1920.

1) Dvořák, Pogg. Ann. **157**, 42, 1876; Ann. d. Phys. **22**, 606, 1907.

portional dem Quadrat der Schwingungszahl wächst.

Die beiden Stimmgabeln stehen vor den beiden Enden $A$ und $B$ (s. Figur) eines in




horizontaler Ebene aufgestellten gabelförmigen Rohres aus Zinkblech von rund 40 mm Durchmesser. Die Resonanzkästen der Gabeln werden ein wenig über die Rohrenden übergeschoben. Die Gesamtlänge $AC + CD$ beträgt etwa ein Viertel der Wellenlänge $\lambda$ des Tones 256. Das Rohr ist bei $D$ durch eine feste Wand (gut schließende Korken) verschlossen, so daß hier ein Knoten der Bewegung entsteht. Das eine Ende $a$ des Manometerrohres ist durch den Korken durchgeführt, so daß seine Öffnung in dem Schwingungsknoten des Hauptrohres liegt. Die Länge des Manometerrohres $ab$ bis zum Alkoholfaden beträgt ebenfalls $\frac{\lambda}{4}$ des Tones 256[1]).

Wird jetzt eine der beiden Stimmgabeln mit dem Bogen kräftig angestrichen, so gibt der Alkoholfaden einen den Überdruck anzeigenden Ausschlag. Die Stimmgabeln sollen vor den Rohrenden so aufgestellt sein, daß jede für sich etwa den gleichen Ausschlag verursacht. Tönen nun beide Stimmgabeln gleichzeitig, und ist die eine gegen die andere ein wenig verstimmt, so pendelt der Alkoholfaden im Tempo der Schwebungen $p-q$ mit. Zur objektiven Demonstration wird der Alkoholfaden gefärbt und auf einen Schirm projiziert.

Da der Alkoholfaden weder auf $p$ für sich, noch auf $q$ mitschwingt, kann er auch die Schwebungen $p-q$ nicht anzeigen. Also beweist sein Mitschwingen die Existenz einer sinusförmigen periodischen Druckkomponente von der Periodenzahl $p-q$. Man kann den Ton $p-q$ entweder als Nebenprodukt zu dem Schalldruck, wie ihn Rayleigh definiert, auffassen, oder aber als Teil des Schalldruckes, indem man denselben, im Gegensatz zu Rayleigh, nicht mehr als zeitlich konstante, sondern variable Größe definiert[1]).

Auf den ersten Blick scheinen Anordnung und Deutung des Versuches so einfach und selbstverständlich zu sein, daß jede weitere Bemerkung überflüssig erscheinen könnte. In Wirklichkeit liegen die Verhältntsse aber recht verwickelt. Zunächst ist bei der tiefen Lage der benutzten Stimmgabeln wichtig, daß die Luft in den Resonanzkästen kräftig mitschwingt, und daß die Gabeln gut aufgestellt und bedient werden. Ferner gibt für die von $A$ kommende Tonwelle das Rohrstück $CB$ Veranlassung zur Schwächung infolge von Interferenz, und entsprechend für die von $B$ kommende Welle das Rohrstück $CA$. Man macht deshalb das Rohrstück $CA$ bzw. $CB$ verhältnismäßig kurz. Die Länge von $CD$ wird zwecks bequemer Einstellung posaunenartig veränderlich gemacht. Wie schon Dvořák durch seine Druckmessungen im Kundtschen Rohr gezeigt hat, ist der Überdruck in den Knoten der Bewegung besonders stark. Infolgedessen sind die Längen $AC + CD$ und $ab$ entsprechend abgestimmt. Das Manometer mißt also nicht den Druck in $D$, sondern in $b$. Die Luftsäule $ab$ wird durch die Druckschwankungen in $D$ zum Mitschwingen erregt, wodurch verständlich wird, daß $ab$ ungefähr gleich $\frac{\lambda}{4}$ (für hohe Töne auch $\frac{3}{4}\lambda$, $\frac{5}{4}\lambda$ .....) sein muß. Die von Dvořák u. a. bei Druckmessungen mit dem Flüssigkeitsmanometer zuweilen beobachteten negativen Ausschläge, die ich in einigen Fällen unter anderen Versuchsbedingungen auch erhielt, traten bei der beschriebenen Versuchsanordnung nicht auf. Auf weitere Einzelheiten (Strömungserscheinungen bei $a$ usw.) einzugehen, würde hier zu weit führen. Auf die Größe der Neigung der beiden Schenkel des Manometerrohres gegen die Horizontale kommt es nicht so genau an. Sie darf ziemlich bedeutend sein (1 : 5 oder dergl.).

Die ganze Frage des Schalldruckes und der damit im Zusammenhang stehenden Fragen ist noch so wenig geklärt, daß man bei der Deutung entsprechender Versuche äußerst vorsichtig sein muß. Das gilt noch besonders für eine wesentlich vereinfachte Ausführung des besprochenen Versuches, die andererseits aber auch ihre Nachteile hat. In die Resonanzkästen der beiden Stimmgabeln wird bis möglichst nahe an

1) Praktisch wird das Rohrsystem auf ein gemeinsames Brett montiert, welches zwei Stützen trägt. Auf der einen ruht in passender Fassung, die durch ein Kugelgelenk mit der Stütze verbunden sein kann, das Hauptrohr, während auf der anderen, deren Höhe ein wenig geändert werden kann, das Ende $c$ des Manometerrohres ruht. Statt durch einen Korken kann das Blechrohr durch eine in der Mitte durchbohrte, aufgelötete Platte verschlossen sein. Das Bohrloch findet seine Fortsetzung in einem aufgelöteten kurzen Metallröhrchen, mit welchem das Ende $a$ des Manometerrohres durch ein kurzes Schlauchstück verbunden wird. Mit wenigen Handgriffen ist dann das Ganze justiert.

1) E. Waetzmann, l. c. S. 124 und F. Küstner, Ann. d. Phys. 50, 941, 1916.

den Schwingungsknoten je ein Glasrohr von einigen Millimetern Durchmesser eingeführt. Die beiden Rohre werden durch kurze Schlauchstücke an ein gabelförmiges Verbindungsstück angeschlossen, welches in ein schwach gebogenes kurzes Rohr ausläuft, in welchem sich der Alkoholfaden befindet. Sein Abstand von den Enden der Rohre beträgt wieder $\frac{\lambda}{4}$. Geben die beiden Stimmgabeln Schwebungen, so zeigt der Alkoholfaden die vorher besprochenen sinusförmigen Druckschwankungen an.

### Zusammenfassung.

Es wird ein Versuch beschrieben, bei welchem man die Stöße zweier getrennter Tonquellen hört, und gleichzeitig an einem Körper, der weitgehend linearen Schwingungsgesetzen gehorcht, die objektive Existenz einer sinusförmigen Druckkomponente von der Periodenzahl der Stöße beobachtet. Der Versuch ist wichtig für die Theorie des Schalldruckes und die damit im Zusammenhang stehenden Fragen.

Anmerkung bei der Korrektur. Zur Bemerkung des Herrn Budde in Heft 10 des laufenden Jahrganges dieser Zeitschrift: Meine früheren Darlegungen in der — nicht von mir sondern von Herrn Budde begonnenen — Polemik halte ich voll aufrecht.

Breslau, Physikalisches Institut, April 1920.

(Eingegangen 10. Mai 1920.)

## Die Rotverschiebung der Sonnenlinien.

Von A. H. Bucherer.

Bei einer so radikalen Rekonstruktion der physikalischen Begriffe, wie die allgemeine Relativitätstheorie sie fordert, ist das Bedürfnis nach experimentellen Beweisen besonders dringlich. Von dem Erfahrungsgrunde der Identität von Schwere und Trägheit bis zum Äquivalenzprinzip und seinen weiteren Konsequenzen ist ein kühner Sprung und die Fehlerquellen der Urteilsbildung sind nicht so leicht zu übersehen. Ob den bisher vorgebrachten Beweisen entscheidende Bedeutung zukommt, ist daher wohl eine der Prüfung werte Frage.

Drei Beweise wurden bisher zugunsten der allgemeinen Relativitätstheorie angeführt: Die Ablenkung eines Lichtstrahls im Gravitationsfelde der Sonne, die Perihelbewegung des Merkurs und die Rotverschiebung der Linien des Sonnenspektrums. Was die Ablenkung eines Lichtstrahls betrifft, so ist der Betrag der Ablenkung noch nicht hinreichend genau festgestellt, um als Beleg für die allgemeine Relativitätstheorie gelten zu können. Auch nach anderen Theorien ist eine Ablenkung zu erwarten. Bekanntlich hat Eddington, indem er den Lichtstrahlen Trägheit und Schwere zuordnete, auf Grund der Newtonschen Gravitationstheorie eine Ablenkung berechnet, die die Hälfte des von Einstein gefundenen Wertes ausmacht, während die Beobachtung zwischen beiden Beträgen schwankt[1]).

Von Wichtigkeit ist die Übereinstimmung der Perihelbewegung des Merkurs mit der Einsteinschen Theorie dieser Bewegung. Keine andere Theorie hat bisher eine Erklärung für die Perihelbewegung geliefert. Die Anwendung der speziellen Relativitätstheorie führt zu einem viel zu kleinen Wert. Es ist aber gegen eine solche Berechnung einzuwenden, daß der benutzte Flächensatz streng genommen in der Relativitätstheorie keinen Platz hat und daß es schwer ist, abzuwägen, welche Fehler hierdurch in die Rechnung eingeführt werden. Ich habe mich bemüht, andere Wege zur Berechnung zu finden und langwierige Rechnungen zu diesem Zwecke ausgeführt; bisher ohne Erfolg. Die Perihelbewegung des Merkurs ist heute tatsächlich ein Beweis für die allgemeine Relativitätstheorie.

Ein besonderes Interesse darf die Theorie der Rotverschiebung beanspruchen, da in ihr das Äquivalenzprinzip einen direkten Ausdruck findet. Dieses Prinzip besagt, daß Gleichwertigkeit zwischen zwei Bezugssystemen besteht, von denen das eine in einem homogenen Schwerefelde ruht und das andere in einem schwerelosen Felde gleichförmig beschleunigt ist. Das Licht von einem sehr großen, relativ zur Erde ruhenden Himmelskörper muß daher eine Art von Dopplereffekt aufweisen, der von demselben Betrag wäre, wie der eines sehr kleinen Sternes, der sich mit einer gewissen aus dem Schwerefelde des großen Sternes berechenbaren Geschwindigkeit von der Erde fortbewegt. In der Tat weist das Spektrum der Sonnenlinien eine derartige Rotverschiebung auf, die von der verlangten Größenordnung ist.

Es soll nun gezeigt werden, daß dieser Effekt auch auf anderem Wege seine Erklärung findet. Wir gehen dabei von folgender Er-

1) Die Veröffentlichung der Protokolle hat seitdem den Einsteinschen Wert mit hoher Wahrscheinlichkeit bestätigt. Wie ich demnächst zeigen werde, läßt sich aus meiner Theorie der Rotverschiebung dieser Wert ableiten.

fahrungstatsache aus. Wir nehmen durch die Versuche von Southerns als erwiesen an, daß der Energieinhalt eines Körpers mit Schwere verknüpft ist, nachdem sich aus dem Verhalten des Elektrons ergeben hatte, daß mit seiner Energie Trägheit verbunden ist. Es ergibt sich dann aus der Maxwellschen Theorie sowohl wie aus der speziellen Relativitätstheorie, daß die ruhende Masse darstellbar ist durch

$$m = \frac{E}{v^2}, \tag{1}$$

wo $E$ die Energie und $v$ die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. — Wir wollen folgendes Gedankenexperiment ausführen: Auf der Sonne füllen wir einen Hohlraum mit vollkommen spiegelnden Wänden mit monochromatischem Licht von der Wellenlänge $\lambda$. Die Energie dieser Strahlung sei $E$ und die damit nach (1) verbundene Masse sei $m$. Diesen Behälter bringe ich auf die Erde und leiste damit eine Arbeit gegen die Gravitationskraft der Sonne:

$$W = \frac{E}{v^2}\left(\frac{\mu}{R} - \frac{\mu}{r}\right). \tag{2}$$

Der zweite Term ist zu vernachlässigen, weil der Sonnenradius $R$ klein ist gegen den Abstand $r$ der Erde von der Sonne. Läßt man dieselbe Strahlungsenergie, die in dem Hohlraum sich befand, hinüberstrahlen, d. h. ohne Arbeit von der Sonne zur Erde gelangen, so muß die übermittelte Energie um den durch (2) bestimmten Betrag vermindert sein.

$$-\,\mathrm{d}E = \frac{E}{v^2}\frac{\mu}{R}. \tag{3}$$

Bei der Ableitung dieser Gleichung war zu erwägen, daß $\frac{\mu}{v^2 R}$ gegen $E$ sehr klein ist.

Wir sind zum Schluß gelangt, daß die Strahlungsenergie auf der Sonne geringer ist, als auf der Erde unter sonst gleichen Verhältnissen. Die weitere Frage ist nun, worin äußert sich diese Energieverminderung. Sie kann sich nur in einer Änderung der Amplitude oder der Wellenlänge äußern. Die Amplitude kann sich nicht ändern, weil die Gravitationskraft senkrecht auf der Schwingungsrichtung der nach der Erde gesandten Strahlen steht. Die Wirkung der Schwerkraft ist nämlich so, als ob sie nur auf die ihr parallel sich bewegenden Strahlenmassen bzw. nur auf die Komponenten der Strahlen einwirkte, die mit ihr gleichgerichtet sind. So müssen wir denn folgern, daß die Schwerkraft die Wellenlänge verändere. Setzen wir die Energie der Masseneinheit der Strahlung $\frac{h}{\lambda^3}$, indem ja die Strahlungsenergie umgekehrt proportional der dritten Potenz der Wellenlänge ist, so schreiben wir der Masse $m$ die Energie:

$$E = \frac{m h}{\lambda^3} \tag{4}$$

zu. Wie wir soeben gezeigt haben, wirkt die Schwerkraft aber nur auf die in ihre Richtung fallenden Komponenten der Strahlen. Die durch Gl. (3) angegebene Energieverminderung betrifft daher nur ein Drittel der Strahlungsmasse. Die Wirkung auf dieses Drittel ist deshalb dreimal so groß, als wenn die gesamte Masse $m$ eine Wellenlängenänderung erlitte. Es folgt:

$$-\,\mathrm{d}E = \frac{E\cdot\mu}{v^2 R} = \frac{1}{3}\frac{m h}{\lambda^3} \tag{5}$$

und vermittelst (4)

$$-\frac{\mu}{v^2 R} = \frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}\lambda^3}{\lambda^3} = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}. \tag{6}$$

Durch Einsetzen der Werte für $\mu$, $v$ und $R$ ergibt sich für die Rotverschiebung:

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} = 2 \times 10^{-6}. \tag{7}$$

Es ist das derselbe Wert den Einstein gefunden hat.

Es würde sich aus diesen Ergebnis folgern lassen, daß das Äquivalenzprinzip durch die Rotverschiebung keinen entscheidenden Beleg erhält. Wahrscheinlich lassen sich andere Konsequenzen dieses Prinzips in analoger Weise ableiten. Damit wären einfachere Methoden zur Berechnung einer bestimmten Klasse physikalischer Erscheinungen gewonnen.

Bonn a. Rh., im April 1920.

(Eingegangen 3. Juni 1920.)

## Notiz zur Geiger-Nuttallschen Gleichung.

Von Gerhard Kirsch.

Der empirisch gefundene Zusammenhang zwischen den Reichweiten der $\alpha$-Strahlen und den Zerfallskonstanten der radioaktiven Stoffe wurde zum ersten Male von H. Geiger und J. M. Nuttall durch die Formel

$$\log \lambda = A + B \log R \tag{1}$$

Tabelle I.

| Element | *Th* | *Rd Th* | *Th X* | *Th Em* | *Th A* | *Th C* | *Th C'* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zahl der $\alpha$-Teilchen . . . . . | 58 | 57 | 56 | 55 | 54 | 53 | 53 |
| Zahl der Elektronen . . . . . | 26 | 24 | 24 | 24 | 24 | 23 | 22 |
| Summe der Bestandteile . . . . | 84 | 81 | 80 | 79 | 78 | 76 | 75 |
| $= A^{4/3}$ . . . . . | 490 | 476 | 479 | 475 | 479 | 503 | — |

dargestellt. Nachdem H. Rausch v. Traubenberg[1]) versucht hatte, auf Grund bestimmter Vorstellungen über die Bewegung der $\alpha$-Teilchen im Innern des Atoms, sowie wahrscheinlichkeitstheoretischer Überlegungen den Charakter dieser Gleichung zu begründen, gab F. A. Lindemann[2]) eine theoretische Ableitung dieser Gleichung, unter der Annahme, daß die Teilchen, von deren Lage die Stabilität des Atoms abhängt, mit einer mittleren Energie $E = h\nu$ rotieren oder oszillieren. Jedes Teilchen passiert eine für das Unstabilwerden kritische Stellung $\nu$-mal in der Sekunde, so daß die Wahrscheinlichkeit der Anwesenheit in dieser kritischen Stellung innerhalb der Zeit $\tau$ gleich $\tau\nu$ ist. Bewegen sich $N$ Teilchen unabhängig voneinander, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie alle sich innerhalb der Zeit $\tau$ durch ihre kritische Stellung bewegen:

$$\lambda = (\tau\nu)^N. \qquad (2)$$

Durch Einführung der Beziehung zwischen Reichweite und Anfangsenergie der $\alpha$-Teilchen

$$R = kE^{3/2}$$

kann man diese Gleichung weiter umformen:

$$\log\lambda = N(\log\tau + \log h\nu - \log h),$$

$$\log E = {}^2/_3 \log\frac{R}{k},$$

$$\log\lambda = N\left(\log\tau + {}^2/_3\log\frac{R}{k} - \log h\right) =$$

$$= Na + {}^2/_3 N\log R, \qquad (3)$$

worin $a = \log\dfrac{\tau}{h\,k^{2/3}}$ ist. Da in der Gleichung (1) nach der Ansicht von Geiger und Nuttall $B$ eine für alle 3 Zerfallsreihen konstante Größe sein sollte, so war damit die Folgerung gegeben, daß $N$ für alle radioaktiven Stoffe gleich groß und ungefähr gleich 80 sei.

Im Jahre 1914 waren aber im Institut für Radiumforschung in Wien von St. Meyer, V. F. Heß und F. Paneth[3]) von vielen Radioelementen besonders der Actiniumfamilie neue Reichweitemessungen vorgenommen worden. Auf Grund dieser neuen Daten konnte die Konstanz von $B$ in der Geiger-Nuttallschen Beziehung nicht mehr aufrecht erhalten werden und St. Meyer[1]) berechnete aus den neuen Werten von $B$ die Zahl $N$ für die 3 Zerfallsreihen:

für die Uran-Radiumreihe $N = 81$,
für die Thoriumreihe $N = 77$,
für die Aktiniumreihe $N = 71$.

Wir möchten diese Zahlen bloß als Mittelwerte für jede Zerfallsreihe betrachten, da es von vornherein doch wohl nicht wahrscheinlich ist, daß die Zahl der zum Zerfall zusammenwirkenden Teilchen durch die ganze Zerfallsreihe konstant bleibt, um so weniger, als die Gesamtzahl der den Kern aufbauenden Teilchen überhaupt nur von der Größenordnung der errechneten $N$ sein dürfte.

Um zu bestimmten Werten von $N$ für jedes Radioelement zu gelangen, schließen wir uns der Auffassung von W. Kossel[2]) an, daß die Atomkerne im wesentlichen nur aus Heliumkernen nebst den sog. Bindeelektronen bestehen.

Der Thoriumkern würde sich demnach aus 58 *He*-Kernen aufbauen. Da diese insgesamt nach außen mit der Ladung $+116e$ wirken, der Thoriumkern aber nur die Ladungszahl 90 besitzt, so muß er noch 26 Elektronen enthalten. Jedes folgende Zerfallsprodukt des Thoriums enthält dann immer je einen Kernbestandteil weniger, als das vorhergehende. Tabelle I enthält für die $\alpha$-Strahler der Thoriumfamilie die Anzahl der Kernbestandteile jeder Gattung, sowie deren Summe.

Da der radioaktive Zerfall wahrscheinlich nur von der relativen Lage der Kernbestandteile abhängt, so ist das $N$ in Gleichung (3) um 1 kleiner zu setzen, als die Zahl der Teilchen, welche zum Zerfall zusammenwirken. Wie wir aus der dritten Zeile der Tabelle sehen, liegt die von St. Meyer berechnete Zahl $N = 77$ dem Mittel der Summen der Kernbestandteile beträchtlich nahe. Wir machen daher als die einfachste Annahme die, daß sich alle Kernbestandteile unabhängig voneinander bewegen und alle beim Zerfall des Kernes zusammenwirken.

Wenn wir die nach unserer Annahme berechneten $N$ in die Gleichung (3) einsetzen,

1) Götting. Nachr. 28, 1915.
2) Phil. Mag. **30**, 560, 1915.
3) Wien. Ber. **123**, 1459, 1914.

1) Wien. Ber. **125**, Mitt. Ra.-Inst. Nr. 89, 1916.
2) Diese Zeitschr. **20**, 265, 1919.

Tabelle II.

| Element | *UI* | *UII* | *Jo* | *Ra* | *RaEm* | *RaA* | *RaC* | *RaC'* | *Pb* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zahl der *He*-Teilchen | 59 | 58 | 57 | 56 | 55 | 54 | 53 | 53 | 52 |
| Zahl der *H*-Teilchen | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Zahl der Elektronen | 28 | 26 | 26 | 26 | 26 | 26 | 25 | 24 | 22 |
| Summe der Kernbestandteile | 89 | 86 | 85 | 84 | 83 | 82 | 80 | 79 | 76 |
| $-a \cdot 10^2$ | 448 | — | 464 | 463 | 466 | 465 | — | — | 471 |

so bedeutet sie, geometrisch gedeutet natürlich nicht mehr eine Gerade im $\log\lambda = \log R$-Diagramm. Die einzige Größe, über die wir noch nicht verfügt haben, ist jetzt das $a$. Ihre Konstanz oder Veränderlichkeit verspricht weitere Auskunft über den Kernbau. Die letzte Zeile der Tabelle I enthält die Größe $a$, berechnet für alle $\alpha$-Strahler, ausgenommen *ThC'*, dessen $\lambda$ ja eben erst auf Grund der Geiger-Nuttallschen Gleichung bestimmt werden kann. Es fällt sofort auf, daß das $a$ für die 4 aufeinanderfolgenden $\alpha$-Strahler mitten in der Reihe merklich konstant ist, während für *Th* und *ThC*, die von diesen $\alpha$-Strahlern durch dazwischen liegende $\beta$-Zerfälle getrennt sind, $a$ einen deutlich anderen Wert annimmt. Für die Berechnung bei *ThC* ist natürlich nur die $\alpha$-Zerfallswahrscheinlichkeit zugrunde gelegt. Die Konstanz von $a$ für die mittleren Glieder der Reihe in Verbindung mit der ziemlich gleichmäßigen Abnahme der Lebensdauer bei diesen Gliedern läßt die Punkte derselben im $\log\lambda$ - $\log R$-Diagramm in eine Gerade fallen. Diese 4 Elemente werden also, was den Zusammenhang zwischen $\lambda$ und $R$ betrifft, ebensogut von der Geiger-Nuttallschen Gleichung mit konstant angenommenem $N$, wie mit dem nach unserer Annahme variabel genommenem $N$ zusammengefaßt. In einem Punkte jedoch leistet unsere Auffassung mehr. Für Thorium gibt die Geiger-Nuttallsche Gleichung mit konstantem $N$ eine um mehr als 2 Zehnerpotenzen zu kleine Lebensdauer, während bei variablem $N$ und konstant genommenem $a$, nur eine etwa 10mal zu kleine Lebensdauer resultiert. Da aber das $a$ auch für *ThC*, dessen Daten zuverlässig bekannt sind und das auch eine in keiner Hinsicht extreme Lebensdauer hat, deutlich vom $a$ der anderen Elemente abweicht, so dürfte auch die Abweichung beim *Th* reell sein und darauf hinweisen, daß die $\alpha$-Emission beim *Th* und beim *ThC* auf etwas andere Weise zustande kommt, als bei den übrigen Elementen, wofür auch noch besonders beim *ThC* der Umstand spricht, daß es die ziemlich regelmäßige Abnahme der Lebensdauer der anderen Elemente mit fortschreitendem Zerfall nicht fortsetzt. Wir werden in einer weiteren Arbeit auf diese Einzelheiten bei der Aufstellung eines Kernmodelles der radioaktiven Atome noch zurückkommen und wenden uns jetzt der Betrachtung der Radiumreihe zu.

Die den Elementen der Thoriumreihe entsprechenden Elemente dieser Reihe haben ein um 2 Einheiten größeres Atomgewicht, das also nicht durch 4 teilbar ist, dementsprechend müssen diese Elemente im Kern neben den Bestandteilen der analogen Elemente der Thoriumreihe noch je 2 *H*-Teilchen und 2 die positive Ladung derselben kompensierende Elektronen enthalten. (Tabelle II.)

Die Summe der Bestandteile ist also um je 4 größer als bei den Elementen der Thoriumreihe. Unsere Annahmen erzielen also hier volle Übereinstimmung mit den von St. Meyer berechneten Zahlen für $N$ und damit auch mit der Wirklichkeit. Ferner finden wir wieder deutliche Konstanz von $a$ für die 4 aufeinanderfolgenden $\alpha$-Strahler von *Jo* bis *RaA*. Die Abweichungen vom Mittelwert sind sogar noch geringer als bei der Thoriumfamilie und betragen im Mittel weniger als $^1/_4$ Proz.; das ist eine so geringe Streuung, als sie bei der derzeitigen Genauigkeit der Reichweitebestimmungen nur verlangt werden kann.

Vom *Jo* wurde die Bestimmung des Stromes, den ein hochprozentiges *Th-Jo*-Gemisch in unendlich dünner Schicht zu unterhalten vermag, zugrunde gelegt, wie sie von St. Meyer[1]) ausgeführt wurde und für die mittlere Lebensdauer 145 000 Jahre lieferte. Der *Jo*-Gehalt dieses Gemisches wurde von O. Hönigschmid und St. Horovitz[2]) durch Bestimmung des Atomgewichtes ermittelt. Umgekehrt liefert natürlich die Reichweite (2,95 cm $= R_0$) mit dem Mittelwert von $a$ einen von 145 000 Jahren nur wenig abweichenden Wert, während die Gleichung (1) mit konstantem $A$ und $B$ für $\tau$ den Wert 74 000 Jahre ergibt.

Da für unmittelbar aufeinanderfolgende $\alpha$-Strahler $a$ tatsächlich eine Konstante zu sein scheint, so sei an dieser Stelle die mittlere

1) Wien. Ber. **125** (Mitt. Ra.-Inst. Nr. 88), 1916.
2) Wien. Ber. **125** (Mitt. Ra.-Inst. Nr. 87), 1916.

Tabelle III.

| Elemente | *Pa* | (*Ac*) | *RdAc* | *AcX* | *AcEm* | *AcA* | *AcC* | *AcC'* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zahl der *He*-Teilchen | 57 | 56 | 56 | 55 | 54 | 53 | 52 | 52 |
| Zahl der *H*-Teilchen | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Zahl der Elektronen | 24 | 24 | 23 | 23 | 23 | 23 | 22 | 21 |
| Summe der Kernbestandteile | 82 | 81 | 80 | 79 | 78 | 77 | 75 | 74 |
| $-\lambda \cdot 10^5$ | (>490) | — | 482 | 485 | 492 | 483 | 490 | — |

Lebensdauer von *UII* angegeben, wie sie sich bei variablem $N$ ergibt: $\log\lambda = N\,(a + {}^2/_3 \log R_0)$

$= 85\,(-0{,}464 + {}^2/_3\,0{,}439) = -14{,}6.$

$\lambda = 2{,}52{,}10^{-15}$, $\tau = 3{,}96{,}10^{14}\,\text{sec} = 1{,}3{,}10^7$ Jahre.

Für *UI* erhalten wir ein verhältnismäßig kleines $a$, während *Po*, *Th*, *ThC* und wie wir sehen werden auch *AcC* und *Pa* ein größeres $a$ ergeben, als die $\alpha$-Strahler mitten in der Reihe. Es ist natürlich möglich, daß dies den Tatsachen entspricht. Da aber von *UI*, dessen $\alpha$-Strahlung mit der gleich starken 4 mm weiter reichenden von *UII* untrennbar verbunden ist, unseres Wissens nur die Reichweitebestimmung von H. Geiger und J. M. Nuttall[1]) vorliegt, die bereits älteren Datums ist, und wohl mit einem Fehler von 1 bis 1,5 mm behaftet sein könnte, soll hier nicht näher auf dieses Element eingegangen werden. Auch ist die Frage noch nicht entschieden, aus wieviel Isotopen das Uran besteht (Actinouran).

Von *RaC* ist noch keine Reichweite beobachtet worden, von *RaC'* ist eine direkte Bestimmung von $\lambda$ derzeit unmöglich, daher müssen diese beiden Elemente ebenfalls aus diesen Betrachtungen ausgeschieden bleiben.

*Po* gehört, sowohl, was $\lambda$, als auch, was die Reichweite betrifft, zu den am besten erforschten Radioelementen. Die Abweichung des Wertes von $a$ vom Mittel der übrigen $\alpha$-Strahler der Radiumreihe ist daher zweifellos als wirklich aufzufassen.

Was das Atomgewicht der Actiniumreihe betrifft, so sind wir derzeit auf Vermutungen angewiesen. Die meisten Autoren nehmen heute wohl an, daß die *Ac*-Reihe beim *UII* von der *U-Ra*-Reihe abzweigt und daß *UY* die unmittelbare Muttersubstanz des *Pa* ist. Diese Annahme steht erstens im Einklang mit dem Atomgewicht des „Uranbleis"; zweitens macht St. Meyer[2]) für dieselbe geltend, daß im $\log\lambda - \log R$-Diagramm die durch die Punkte *RdAc*, *AcX*, *AcEm*, *AcC* gezogene Gerade beim Punkte *UII* die der *U-Ra*-Reihe entsprechende Gerade schneidet. Wir möchten gegen diese Annahme einmal geltend machen, daß es sich mit der wahrscheinlichkeitsstatistischen Auffassung der Zerfallserscheinung nur schwer vereinbaren läßt, anzunehmen, daß die Actiniumreihe als Zweigreihe durch alle Zerfallsstadien parallel neben der Hauptreihe herläuft, ohne daß eine von den beiden auch nur zum Teil irgendwo in die andere übergeht. Weiters erhält man bei Zugrundelegung der Punkte *RdAc*, *AcX*, *AcEm* und *AcC* für $N$ den Wert 71 für die *Ac*-Reihe, also einen so kleinen Wert, daß demselben bei Anwendung unserer an der *Th*- und *Ra*-Reihe bewährten Annahmen ein Atomgewicht der *Ac*-Elemente entsprechen würde, das um etwa 8 Einheiten kleiner wäre, als das der *Th*-Elemente der gleichen Plejaden. Wir möchten daher folgendermaßen überlegen: *AcC* soll, da es durch $\beta$-Zerfall von den übrigen $\alpha$-Strahlern der Reihe getrennt ist, nicht berücksichtigt werden. Für die mittleren 4 $\alpha$-Strahler der Reihe soll $a$ konstant werden. Dies ist jedoch nur für 3 derselben erreichbar; entweder *AcEm* oder *AcA* fällt heraus. Wir lassen die *AcEm* herausfallen und erzielen damit:

1. Die Größe $a$ wird für *RdAc*, *AcX*, *AcA* konstant.

2. $N$ wird für die *Ac*-Reihe um 1 kleiner als für die *Th*-Reihe. Infolgedessen besteht zwischen den Größen $\frac{1}{N}$, $\log\lambda$ und $a$ nicht nur Symbasie, sondern auch angenäherte Proportionalität von Reihe zu Reihe. (Tabelle III.)

3. Das Atomgewicht $4n + 1$ und zwar für $Ac = 225$, das zu diesem $N$ führt, gibt für das bleiisotope Endprodukt der Reihe das Atomgewicht 205, das von dem des *RaG* nur um eine Einheit abweicht und von dem 4 Proz. das Atomgewicht des Gemisches nur um 0,04 Einheiten erniedrigen würden.

4. Das wichtigste Argument gegen einen genetischen Zusammenhang zwischen *Ac*- und *Ra*-Reihe und für ein ungerades Atomgewicht der *Ac*-Elemente möchten wir darin sehen, daß weder dem *AcB* noch dem *UY* ein $\beta$-Strahler folgt, dessen $\beta$-Zerfallsgeschwindigkeit größer wäre, als die der Muttersubstanz, während den $\beta$-Strahlern der *Ra*- und *Th*-Reihe mit gerader Kernladungszahl stets ein weniger stabiler $\beta$-Strahler folgt. Dies möchten wir dem Streben

1) Phil. Mag. (6) **23**, 445, 1912.
2) Wien. Ber. **123**, 1459, 1914.

nach Symmetrie bei den Elektronenanordnungen zuschreiben, wie es sich in dem vorzugsweisen Auftreten gerader Valenzzahlen bei Elementen mit gerader Kernladungszahl und ungerader Valenzzahlen bei Elementen mit ungerader Kernladungszahl wirksam zeigt. Die $\beta$-Strahler der *Ra* und *Th*-Reihe mit gerader Kernladungszahl, die stets stabiler sind als ihre unmittelbaren Folgeprodukte, enthalten nach unseren Annahmen sämtlich eine gerade Zahl Elektronen. Für *UY* und *AcB* jedoch möchten wir eben den Umstand, daß ihre Stabilität gegen $\beta$-Zerfall geringer ist, als die ihrer unmittelbaren Folgeprodukte, mit dem Vorhandensein einer ungeraden Zahl von Elektronen im Kern dieser Elemente, wie sie sich bei Annahme eines ungeraden Atomgewichtes ergibt, begründen. Die letztangeführte Tatsache erscheint uns sogar schwerwiegender, als die Konstanz des Verhältnisses *Ac*:*U*[1]) und *UX*:*UY*[2]), die nur als ein strenger Beweis für die Abstammung der *Ac*-Reihe von einem Uranisotop gelten kann. Denn es könnte sehr wohl alles uns zugängliche Uran in gleicher Weise aus Isotopen zusammengesetzt sein.

Unsere Annahmen ziehen jedoch zunächst noch die Folge nach sich, daß das Stammelement der Actiniumreihe ein Uranisotop mit dem Atomgewicht 233 ist, die mit dem Atomgewicht des Urans 238,18 unvereinbar ist. Darum ist wohl die Möglichkeit ins Auge zu fassen, daß aus dem *UY* über ein etwas langlebigeres $UY_2$ zunächst ein Uranisotop entsteht, das über ein ebenfalls langlebiges, wohl praktisch strahlenloses *UZ* (*Th*-Isotop) erst das *Pa* liefert. Doch bleibt immer noch die Unstimmigkeit um eine Atomgewichtseinheit in Muttersubstanz und Endprodukt bestehen. Die experimentell gefundenen Werte für *U* und *RaG* lassen eher ein um eine Einheit größeres Atomgewicht, als ein um eine Einheit kleineres für Actinouran und „*Ac*-Blei" vermuten. Eine überraschende Möglichkeit, diesen Tatsachen gerecht zu werden, ergibt sich auf folgende Art:

Da wir den drei heute bekannten radioaktiven Zerfallsreihen die allgemeinen Atomgewichte $4n$, $4n+1$ und $4n+2$ zuschreiben, erhebt sich unwillkürlich die Frage nach der bei ausschließlicher Zulassung von $\alpha$- und $\beta$-Zerfall theoretisch noch möglichen vierten genetisch selbständigen Reihe mit dem allgemeinen Atomgewicht $4n+3$. Bei Annahme von 3 selbständigen *H*-Teilchen im Kern der Elemente dieser Reihe, erhält man für die *N* derselben Werte, die für diese vierte Reihe einen selbständigen radioaktiven Charakter erwarten lassen, so daß uns dieselbe, wenn sie existiert, nicht hätte verborgen bleiben können. Wenn jedoch die 3 *H*-Teilchen mit 2 Elektronen einen $\alpha$-teilchenartigen Komplex bilden, dessen Bewegung als Ganzes für die Stabilität in Betracht kommt, so würden die *N* der Elemente dieser Reihe mit denen der *Ac*-Reihe identisch, ja die Kerne beider Reihen wären vollkommen identisch zusammengesetzt, nur 1 Teilchen, nämlich das mit der Ladung $+1$ hätte in dem einen Fall eine dreimal so große Masse als in dem anderen, und damit ist die Möglichkeit gegeben, daß die Elemente beider Reihen je so ähnliche oder vielleicht praktisch identische Lebensdauern haben, so daß man es mit einer Isotopie zu tun hätte, die sich nicht nur auf die Kernladung, sondern auch auf die Kernstabilität erstreckt. Vielleicht sind die 2 Reichweiten des *RdAc* als ein Anzeichen für die komplexe Beschaffenheit der *Ac*-Reihe aufzufassen. Die Annahme, in Erwägung zu ziehen, daß 2 *H*-Teilchen im Kern der Elemente der *Ra*-Reihe selbständig bleiben, während 3 sich mit 2 Elektronen zu einem Gebilde mit der Masse 3 und der Ladung $+1$ vereinigen, glauben wir uns berechtigt durch den experimentellen Befund J. J. Thomsons[1]), dessen eingehende Untersuchungen seiner $X_3$-Teilchen die Existenz eines solchen Komplexes von verhältnismäßig großer Stabilität sehr wahrscheinlich gemacht haben. Auch aus dem vorzugsweisen Auftreten von Atomgewichten $4n+3$ bei den Elementen mit kleinem Atomgewicht ließen sich Gründe zugunsten dieser Annahme ableiten. Eine solche komplexe Actiniumreihe würde es gestatten, den selbständigen, von dem der Radiumreihe deutlich verschiedenen Charakter derselben einerseits und das mit dem der Radiumreihe nahezu übereinstimmende Atomgewicht von Stammsubstanz und Endprodukt andererseits zu erklären.

Zusammenfassung: Bei konsequenter Anwendung der Annahme, daß die Atomkerne ausschließlich aus *He*- und *H*-Kernen, sowie Elektronen aufgebaut sind, ergeben sich mit Hilfe der Geiger-Nuttallschen Gleichung in der von Lindemann gegebenen Form gewisse Regelmäßigkeiten in der *Ra*- und *Th*-Reihe, deren Übertragung auf die *Ac*-Reihe Schlüsse auf das Atomgewicht derselben zu ziehen erlaubt.

Mit Hilfe einer weiteren Annahme wird versucht auch eine Begründung dafür zu geben, daß es gerade 3 radioaktive Zerfallsreihen gibt.

1) St. Meyer und V. F. Heß, Wien. Ber. **128**, (Mitt. Ra.-Inst. Nr. 122) 1919.

2) G. Kirsch, Wien. Ber. **129** (Mitt. Ra.-Inst. Nr. 127), 1920.

1) Proc. Roy. Soc., London (A), **89**, 1, 1913.

(Eingegangen 10. Mai 1920.)

## Eine graphische Darstellung der Zustandsgleichung.

Von R. Mollier.

Schreibt man die van der Waalssche Zustandsgleichung:

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \tag{1}$$

in der Form

$$\frac{pv^2}{T} = \frac{Rv^2}{v-b} - \frac{a}{T} \tag{2}$$

und trägt man die Größe $\frac{pv^2}{T}$ — die wir im folgenden mit $y$ bezeichnen wollen — als Ordinaten gegen irgendeine Volumfunktion oder gegen eine Temperaturfunktion als Abszissen auf, so erhält man zwei Diagramme, in denen die Isothermen bzw. Isochoren kongruente, in der Ordinatenrichtung verschobene Kurven werden.

Dasselbe gilt auch für die zahlreichen anderen Zustandsgleichungen, die sich in der Form:

$$p = \varphi(v)T + \frac{\psi(T)}{v^2} \tag{3}$$

schreiben lassen.

Am einfachsten wird die Darstellung, wenn man neben $y$ die Dichte $\varrho$ und $1/T$ als Koordinaten wählt. Schreiben wir noch $l$ für die Grenzdichte, $1/b$, so lautet die Gleichung von van der Waals:

$$y = \frac{Rl}{\varrho(l-\varrho)} - \frac{a}{T}. \tag{4}$$

Da bei konstanter Temperatur $y$ sowohl für sehr kleine wie für sehr große Dichten unendlich wächst, so besitzt es ein Minimum, das für alle Isothermen bei derselben Dichte $\varrho_M$ liegt. Für die van der Waalssche Gleichung ist $\varrho_M = l/2$, gleich der halben Grenzdichte und die Isothermen im $y$, $\varrho$-Diagramm sind symmetrisch zu der Ordinate durch $\varrho_M$, Fig. 1.

In reduzierter Form lautet die van der Waalssche Gleichung:

$$\eta = \frac{pv^2}{t} = \frac{8}{\vartheta(3-\vartheta)} - \frac{3}{t} \tag{5}$$

oder

$$\eta = \frac{8}{[1{,}5 + (\vartheta - 1{,}5)][1{,}5 - (\vartheta - 1{,}5)]} - \frac{3}{t}. \tag{6}$$

Im $y$, $\frac{1}{T}$-Diagramm werden die Isochoren parallele Gerade.

Die van der Waalssche Gleichung wird daher durch eine $y$, $\varrho$, $\frac{1}{T}$-Fläche in besonders einfacher Weise dargestellt. Der kritische Punkt

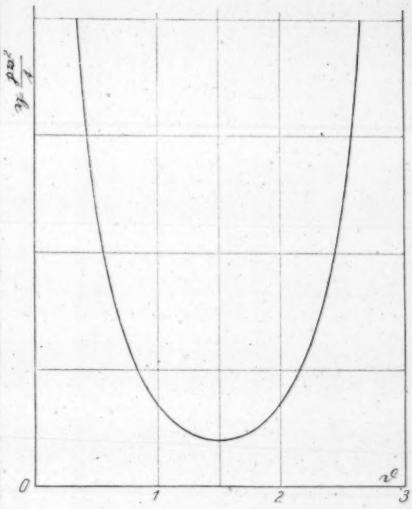



Fig. 1.

und das labile Gebiet treten in dieser Darstellung nicht hervor.

An Stelle von $y$ kann man auch

$$y/R = \frac{pv^2}{RT}$$

wählen, diese Größe ist von der Dimension eines Volumens, und zwar ist $y/R = v^2/v_0$, wo $v_0$ das Volumen in vollkommenem Gaszustand (Avogadroschen Zustand) bei gleichem Druck und gleicher Temperatur bedeutet. Für das Minimum von $y$ ist

$$\frac{p}{v}\left(\frac{dv}{dp}\right)_T = -\frac{1}{2}.$$

Die thermodynamische Bedeutung von $y$ folgt aus der Gleichung:

$$T\,ds = du + p\,dv, \tag{7}$$

es wird

$$ds = \frac{1}{T}du - y\,d\varrho \tag{8}$$

$$d\left(\frac{u}{T} - s\right) = u\,d\left(\frac{1}{T}\right) + y\,d\varrho \tag{9}$$

$$\left(\frac{du}{d\varrho}\right)_T = \left(\frac{dy}{d\,1/T}\right)_\varrho \tag{10}$$

$$\left(\frac{dc_v}{d\varrho}\right)_T = -\frac{1}{T^2}\left(\frac{d^2y}{d\,1/T^2}\right)_\varrho. \tag{11}$$

Damit folgt aus der Symmetrie der Iso-

| | $t$ | $\frac{1}{v}$ | $\varrho_M$ | $T_K$ | $p_K$ | $\frac{RT_K}{p_K v_M}$ | $\Re = \frac{RT_K}{p_K v_K}$ | $\mathfrak{d}_M$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Wasserstoff | 47,3 | 9,65 | 800 | 33,18 | 12,8 | 7,60 | 3,27 | 2,32 |
| (Amagat) | 15,4 | 8,69 | 790 | | | 7,50 | | 2,29 |
| | 0 | 8,23 | 780 | | | 7,40 | | 2,26 |
| Helium | 258,8 | 2,60 | 710 | 5,5 | 2,75 | 5,21 | 2,68 | 1,94 |
| (Kamerlingh-Onnes) | | | | | | | | |
| Stickstoff | 99,45 | 2,90 | 368 | 120 | 33,5 | 5,08 | 3,421 | 1,49 |
| (Amagat) | 16,03 | 2,29 | 369 | | | 5,09 | | 1,49 |
| | 0 | 2,17 | 369 | | | 5,09 | | 1,49 |
| Luft | 99,4 | 2,81 | 388 | 132,5 | 37,2 | 5,06 | 3,42 | 1,48 |
| (Amagat) | 15,7 | 2,18 | 386 | | | 5,03 | | 1,47 |
| | 0 | 2,06 | 387 | | | 5,04 | | 1,47 |
| Sauerstoff | 99,5 | 2,42 | 453 | 154,25 | 49,7 | 5,14 | 3,419 | 1,50 |
| (Amagat) | 15,65 | 1,87 | 440 | | | 5,06 | | 1,48 |
| | 0 | 1,77 | 445 | | | 5,05 | | 1,48 |
| Kohlensäure | 198 | 1,55 | 345 | 304,35 | 72,9 | 5,28 | 3,61 | 1,46 |
| (Amagat) | 100 | 1,23 | 349 | | | 5,35 | | 1,48 |
| | 40 | 1,03 | 357 | | | 5,46 | | 1,51 |
| Kohlensäure | | 1 | 370 | 304 | 72,93 | 5,66 | 3,45 | 1,64 |
| (Keesom) | | | | | | | | |
| Äthylen | 198 | 1,67 | 250 | 282,5 | 50,65 | 5,10 | 3,42 | 1,49 |
| (Amagat) | 100 | 1,32 | 250 | | | 5,10 | | 1,49 |
| | 20 | 1,04 | 256 | | | 5,22 | | 1,53 |
| Isopentan | | 1 | 0,362 | 460,8 | 32,92 | 5,77 | 3,73 | 1,55 |
| (Young) | | | | | | | | |
| Äther | | 1 | 0,406 | 467 | 35,6 | 5,90 | 3,81 | 1,55 |
| (Ramsay u. Young) | | | | | | | | |

thermen im $v$, $\varrho$-Diagramm auch eine Symmetrie für die Energie $u$ und die spezifische Wärme $c_v$. Die Isothermen im $u$, $\varrho$ und im $c_v$, $\varrho$-Diagramm sind symmetrisch zu $\varrho_M$ und haben bei dieser Dichte einen Wendepunkt.

Da für die Isothermen die Expansionsarbeit $\int p dv = -T \int v d\varrho$ ist, so wird auch diese und damit auch die Wärme durch $\varrho_M$ symmetrisch geteilt.

Das Minimum von $v$ läßt sich aus einer Anzahl von Isothermenbeobachtungen mit Sicherheit entnehmen. Besonders kommen hierfür die Versuche von Amagat[1]) an Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff, Luft, Kohlensäure und Äthylen in Betracht, da sie bis zu sehr hohen Dichten reichen, aber auch die Versuche von Keesom[2]) mit Kohlensäure, Ramsay und Young[3]) mit Äther, Young[4]) mit Isopentan und Kamerlingh-Onnes[5]) mit Helium schließen $\varrho_M$ ein.

In der Zahlentafel sind die gefundenen Werte zusammengestellt. $\varrho_M$ ist in den Einheiten der Versuchsberichte gegeben. Die Werte für $CO_2$ (Keesom), $C_4H_{10}O$ und $C_5H_{12}$ sind Mittelwerte aus mehreren benachbarten Isothermen. $\varrho_M$ zeigt bei $N_2$, $O_2$ und Luft keine bestimmte Abhängigkeit von der Temperatur, bei $CO_2$ und $C_2H_4$ nimmt es mit wachsender Temperatur ein wenig ab.

Um die verschiedenen Stoffe miteinander vergleichen zu können, ist in die Tafel die reduzierte Größe $\frac{RT_K}{p_K v_M}$ aufgenommen. Der Wert dieser Größe ist nach van der Waals $= 4$ und ihr Verhältnis zum kritischen Koeffizienten $\Re = \frac{RT_K}{p_K v_K}$ liefert die reduzierte Dichte $\mathfrak{d}_M$.

Für $\Re$ wurden für $H_2$, $N_2$ und $O_2$ und $He$ die Werte von Kamerlingh-Onnes[1]), für $CO_2$ zum Vergleich die beiden verschiedenen Werte von Amagat und von Keesom, im übrigen die Werte von Young[2]) verwendet.

Im ganzen weichen die Werte von $\mathfrak{d}_M$ nicht sehr von dem van der Waalsschen Wert $= 1{,}5$ ab. Nur Wasserstoff und Helium machen eine Ausnahme. Hierzu ist aber zu bemerken, daß sich für $H_2$ zwar die Werte von $\varrho_M$ mit großer Sicherheit aus den Angaben Amagats ergeben, daß aber die gesamte Änderung von $v$ zwischen $\varrho_M$ und der größten Versuchsdichte nur etwa 3,5 Proz. beträgt, so daß möglicherweise die Lage des Minimums durch den von Amagat vorgenommenen graphischen Ausgleich der Versuchsergebnisse beeinflußt sein kann. Nach der mittleren empirischen Zustandsgleichung von

1) Ann. d. Chim. et Phys. **29**, 68, 1893.
2) Leiden. Comm. Nr. 88.
3) Phil. Trans. **178**, 57, 1887.
4) Zeitschr. f. phys. Chem. **29**, 193, 1899.
5) Leiden. Comm. Nr. 102.

1) Leiden. Comm. Nr. 151, 145 u. 119.
2) Young, Dublin Proc. **12**, 1910.

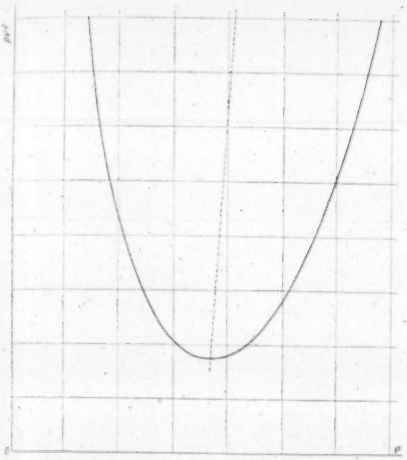


Fig. 2.

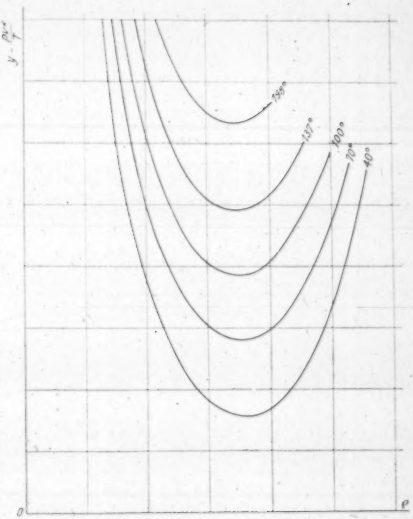



Fig. 3.

Kamerlingh-Onnes[1]), die sich in dem fraglichen Temperaturgebiet ausschließlich auf die Versuche Amagats über $H_2$ stützt, ist $\varrho_M$ wesentlich kleiner. Es beträgt nach dieser Gleichung:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| bei | $t = 0{,}8$ | 1 | 3,16 | 10 |
| | $\delta_M = 1{,}66$ | 1,73 | 1,66 | 1,66 |

Bei Helium steht zur Bestimmung von $\varrho_M$ nur eine Isotherme mit 4 Versuchspunkten zur Verfügung.

Zur Untersuchung der Isothermen im $y, \varrho$-Diagramm in bezug auf Symmetrie, wurde ein mittlerer Durchmesser eingezeichnet. Für $N_2, O_2$ und Luft ergab sich dieser Durchmesser ziemlich geradlinig, aber nicht parallel der $y$-Achse, sondern im positiven Sinne geneigt wie Fig. 2 für Stickstoff zeigt. Bei $CO_2$ und $C_2H_4$ sind die Isothermen in der Nähe der kritischen Temperatur fast genau symmetrisch, während jene für 100° schon eine merkliche Neigung des Durchmessers im früher erwähnten Sinne aufweisen. Fig. 3 gibt einige Isothermen der Kohlensäure nach den Versuchen von Amagat wieder.

Die experimentellen Isothermen und Isochoren zeigen im $y, \varrho$ und $y, 1/T$-Diagramm nicht die Kongruenz, die nach der van der Waalsschen und nach Gleichung (3) bestehen würde. Um diese Abweichungen möglichst deutlich zum Ausdruck zu bringen, kann man unsere graphische Darstellungen noch etwas abändern. Wählt man als Ordinaten anstatt

$$y,\ y - Rv = z$$

oder

$$\frac{z}{R} = \frac{y}{R} - v = \frac{pv^2}{RT} - v,$$

so ist der Nachteil beseitigt, der der ursprünglichen Darstellung dadurch anhaftet, daß $y$ für kleine Dichten unendlich groß wird.

Für die Punkte der Abszissenachse gilt jetzt $\frac{pv}{RT} = 1$ und der Ursprung im $z, \varrho$-Diagramm ist der Boylepunkt.

Die Größe $z$ steht in einfacher Beziehung zu der empirischen Zustandsgleichung von Kamerlingh-Onnes:

$$pv = RT\left[1 + \frac{B}{v} + \frac{C}{v^2} + \frac{D}{v^4} + \frac{E}{v^6} + \frac{F}{v^8}\right] \quad (12)$$

oder

$$\frac{z}{R} = \frac{pv^2}{RT} - v = B + C\varrho + D\varrho^3 + E\varrho^5 + F\varrho^7, \quad (13)$$

indem

$$\left(\frac{z}{R}\right)_{\varrho=0} = B \text{ und } \left(\frac{dz/R}{d\varrho}\right)_{t,\varrho=0} = C$$

den zweiten und dritten Virial-Koeffizienten darstellen.

[1]) Art. V, 10 der Enzykl. d. Math. Wiss., S. 727, auch Leiden. Comm., Suppl. Nr. 23, S. 113.

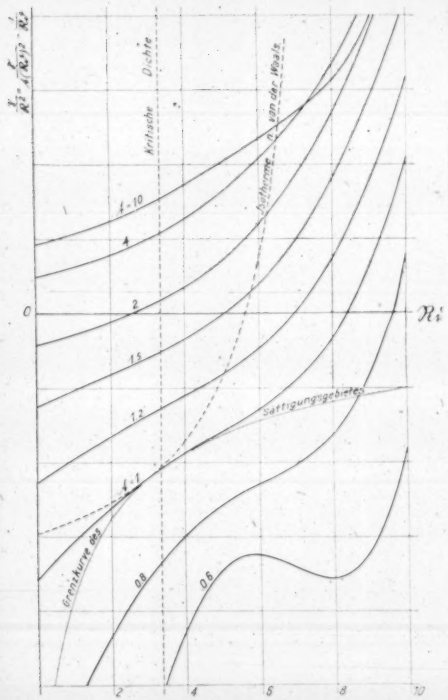



Fig. 4.

Für die van der Waalssche Gleichung wird in reduzierter Form:

$$\frac{\delta}{\Re} = \frac{p v^2}{\Re t} - v = \frac{1}{3 - \delta} - \frac{9}{8 t} \qquad (14)$$

Die Isothermen werden im $z, \varrho$-Diagramm kongruente gleichseitige Hyperbeln.

Die Bedingungen für den kritischen Punkt werden in dieser Darstellung:

$$\left(\frac{d\,\frac{\delta}{\Re}}{d\delta}\right)_t = \Re - 2 \text{ und } \left(\frac{d^2\,\frac{\delta}{\Re}}{d\delta^2}\right)_t = 6 - 2\Re.$$

Aus der letzteren ist ersichtlich, daß so lange die Isothermen positive Krümmung haben, wie z. B. bei den Hyperbeln von van der Waals, der kritische Koeffizient nie mehr als 3 betragen kann.

Im $\frac{z}{R}, \frac{1}{T}$-Diagramm stellt die Isochore für $\varrho = 0$ den Verlauf des zweiten Virialkoeffizienten dar, ihr Schnittpunkt mit der Abszissenachse ist der Boylepunkt.

Um ein Bild des wirklichen Verhaltens der Gase zu geben, ist in Fig. 4 und 5 die mittlere empirische Zustandsgleichung in der reduzierten Form:

$$\frac{\delta}{\Re^2} = \frac{p}{t(\Re\delta)^2} - \frac{1}{\Re\delta} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}(\Re\delta) + \left| + \mathfrak{D}(\Re\delta)^3 + \mathfrak{E}(\Re\delta)^5 + \mathfrak{F}(\Re\delta)^7 \right| \qquad (15)$$

im $\frac{\delta}{\Re^2}, \Re\delta$ und $\frac{\delta}{\Re^2}, \frac{1}{t}$-Diagramm dargestellt. Zum Vergleich ist in ersterem die kritische Isotherme nach der Gleichung von van der Waals

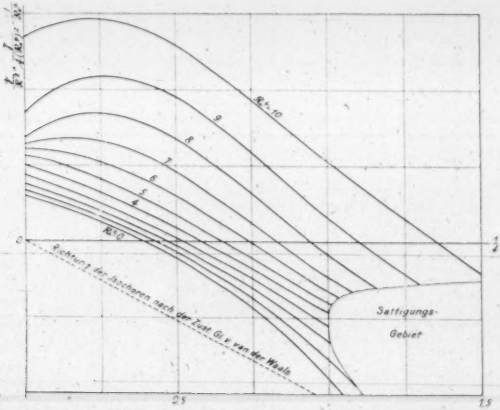



Fig. 5.

hinzugefügt und in letzterem die Richtung der Isochoren nach dieser Gleichung angedeutet.

Daß sich die beiden höchsten Isothermen schneiden und die oberen Isochoren für kleine Werte von $\frac{1}{t}$ ansteigen, beruht auf dem Verhalten des Wasserstoffes, der sich nach den Amagatschen Versuchen vor anderen Stoffen dadurch auszeichnet, daß $\left(\frac{dy}{d\,1/T}\right)_v$ in einem großen Teil des Versuchsgebietes positiv ist.

Zum Studium der Zustandsgleichung wurden mehrfach Prüfungsmethoden angewendet, die auf der Untersuchung des Verlaufes von verschiedenen den Versuchen entnommenen Differentialquotienten beruhen. Manche dieser Methoden erhalten durch unsere Darstellungsweise einen besonders einfachen Ausdruck.

Reinganum[1]) hat den Ausdruck

$$a = v^2\left[T\left(\frac{dp}{dt}\right)_v - p\right]$$

untersucht und gefunden, daß er bei einem Volumen von ungefähr 0,75 des kritischen ein Minimum hat. Nun ist aber

$$a = -\left(\frac{dy}{d\,1/T}\right)_v$$

und da im Gebiete der kritischen Temperatur, in dem Reinganum seine Untersuchung anstellte, die $y$, $\varrho$-Isothermen, wie erwähnt, symmetrisch zu $\varrho_M$ sind, so folgt daraus, das von Reinganum gefundene Gesetz von selbst, das Volumen, bei dem $a$ ein Minimum wird, ist $v_M$.

Nach einer Regel von Young wechselt der Quotient $\left(\frac{d^2p}{dt^2}\right)_v$ beim kritischen Volumen sein Vorzeichen, indem er für größere Volumina negativ, für kleinere positiv ist. Nach Reinganum wird er für noch kleinere Volumina wieder negativ, ist also nur in einem beschränkten mittleren Volumengebiet positiv.

In unserer Darstellung ist:

$$\left(\frac{d^2p}{dt^2}\right)_v = \frac{\varrho^2}{T^3}\left(\frac{d^2y}{d\,1/T^2}\right)_v,$$

die eben erwähnte Beziehung von Reinganum weist wieder auf die Symmetrie der Isothermen hin. Die Dichte, für die der zweite Zeichenwechsel sattfindet, würde die zu $\varrho_K$ symmetrische Dichte $2\varrho_M - \varrho_K$ sein.

Happel[2]) hat die Zustandsgleichung in der Art geprüft, daß er den Ausdruck:

$$\frac{1}{T}\left[p + \frac{v}{2}\left(\frac{dp}{dv}\right)_T\right],$$

der bei van der Waals oder nach der Gleichung (3) unabhängig von der Temperatur sein müßte, untersucht hat. Dieser Ausdruck wird in unserer Darstellungsweise $= \left(\frac{dy}{dv^2}\right)_T$. Tragen wir $y$ als Funktion von $v^2$ auf, so folgt für den kritischen Punkt:

$$\left(\frac{dy}{dv^2}\right)_{T_K} = \frac{y_K}{v_K{}^2} = \frac{p_K}{T_K} \text{ und } \left(\frac{d^2y}{d(v^2)^2}\right)_{T_K} = 0.$$

Der kritische Punkt ist also durch einen Wendepunkt der Isotherme gekennzeichnet und die Isobaren-Isothermen des Sättigungsgebietes werden durch den Ursprung gehende Gerade.

Es möge noch untersucht werden, wie sich die Zustandsgleichung von Clausius:

$$p = \frac{R\cdot T}{v-b} - \frac{f(T)}{(v+c)^2} \qquad (16)$$

zu den hier berührten Fragen verhält. Wir schreiben sie zu diesem Zweck in reduzierter Form und mit Einführung der Grenzdichte 1:

$$\frac{y}{\mathfrak{R}} = \frac{pv^2}{\mathfrak{R}t} = \frac{1}{\mathfrak{d}(1-\mathfrak{d})} - \frac{\frac{27}{16}\frac{1-\frac{1}{1}}{1}f(t)}{\left[1+\frac{1-2}{2\,1}\mathfrak{d}\right]^2} \qquad (17)$$

oder

$$\frac{y}{\mathfrak{R}^2} = \frac{p}{t(\mathfrak{R}\mathfrak{d})^2} = \frac{\mathfrak{R}1}{\mathfrak{R}\mathfrak{d}(\mathfrak{R}1-\mathfrak{R}\mathfrak{d})} - \frac{\frac{27}{64}f(t)}{\left[1+\frac{\mathfrak{R}1-8}{8\,\mathfrak{R}1}\mathfrak{R}\mathfrak{d}\right]^2} \qquad (18)$$

worin $f(t)_K = 1$, $\mathfrak{R} = 4\frac{1-1}{1} - \frac{4\,\mathfrak{R}1}{\mathfrak{R}1+4}$,

$$1 = 1 + \frac{\mathfrak{R}1}{4}.$$

Die Gleichung ergibt für verschiedene Grenzdichten folgende Werte:

| 1 | $\mathfrak{R}1$ | $\mathfrak{R}$ | $t=1$ | | $f(t)=0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\frac{1}{1}$ | $\mathfrak{d}_M$ | $\mathfrak{R}\mathfrak{d}_M$ | $\mathfrak{d}_M$ | $\mathfrak{R}\mathfrak{d}_M$ |
| 4 | 12 | 3 | 1.66 | 4,98 | 2 | 6 |
| 4,5 | 14 | 3,11 | 1,73 | 5,38 | 2,25 | 7 |
| 5 | 16 | 3,2 | 1,87 | 5,83 | 2,5 | 8 |

Das Minimum von $y$ rückt also mit wachsender Temperatur zu größeren Dichten und die kritische Isotherme ist stark unsymmetrisch.

Man kann den symmetrischen Verlauf, den die Isothermen in der Nähe der kritischen Temperatur zeigen, durch eine empirische Gleichung darstellen, wenn man der van der Waalsschen Zustandsgleichung in der Schreibweise (2) noch ein Glied hinzufügt, das unter Erhaltung der Symmetrie dem tatsächlichen Ver-

1) Ann. d. Phys. (4) **18**, 1008, 1895.
2) Ann. d. Phys. **13**, 340, 1904.

lauf der Isothermen Rechnung trägt. Man erhält sehr gute Übereinstimmung mit den Versuchen, wenn man schreibt:

$$\frac{y}{R} = \frac{pv^2}{RT} = \frac{l}{\varrho\,(l-\varrho)} + b + c\varrho\,(l-\varrho). \quad (19)$$

In reduzierter Form:

$$\frac{\eta}{\Re} = \frac{pv^2}{\Re t} = \frac{1}{\delta\,(1-\delta)} + b + c\delta\,(1-\delta) \quad (20)$$

oder

$$\frac{\eta}{\Re^2} = \frac{\Re l}{\Re\delta\,(\Re l - \Re\delta)} + \frac{b}{\Re} + \frac{c}{\Re^3}\Re\delta\,(\Re l - \Re\delta). \quad (21)$$

Aus den Bedingungen des kritischen Punktes folgt:

$$b_K = -\frac{l^2\,3\,(l-1)\,(l-3)+1}{(3l-8)\,(l-1)^2},$$

$$c_K = \frac{l^2\,(l-3)}{(3l-8)\,(l-1)^3}, \quad \Re = \frac{3l-8}{l}\left(\frac{l-1}{l-2}\right)^3,$$

$b$ und $c$ sind im übrigen als Temperaturfunktionen zu betrachten. Sie stehen mit dem 2. und 3. Virialkoeffizienten der Zustandsgleichung von Kamerlingh Onnes in folgender Beziehung:

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{\Re}\left(b + \frac{1}{l}\right) \text{ und } \mathfrak{C} = \frac{1}{\Re^2}\left(lc + \frac{1}{l^2}\right),$$

ferner ist:

$$l = \Re\,\frac{p_K}{RT_K}, \quad b = \frac{b}{\Re}\,\frac{RT_K}{p_K}, \quad c = \frac{c}{\Re^3}\left(\frac{RT_K}{p_K}\right)^3.$$

Die folgende Zahlentafel gibt die kritischen Werte der verschiedenen Koeffizienten in Abhängigkeit von der Grenzdichte:

| $l$ | 3 | 3,2 | 3,3 | 3,4 | 3,5 | 3,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $b_K$ | — 1,125 | — 1,394 | — 1,446 | — 1,475 | — 1,490 | — 1,497 |
| $c_K$ | 0 | 0,1202 | 0,1413 | 0,1520 | 0,1568 | 0,1581 |
| $\Re$ | 2,667 | 3,081 | 3,140 | 3,189 | 3,260 | 3,338 |
| $\Re l$ | 8 | 9,86 | 10,52 | 11,08 | 11,57 | 12,02 |
| $\mathfrak{B}_K$ | 0,2960 | 0,3510 | 0,3596 | 0,3625 | 0,3641 | 0,3657 |
| $\mathfrak{C}_K$ | 0,0156 | 0,0508 | 0,0549 | 0,0568 | 0,0577 | 0,0590 |

Die mittlere empirische Zustandsgleichung liefert $\mathfrak{B}_K = 0{,}3591$ und $\mathfrak{C}_K = 0{,}0508$. Guten Anschluß an die experimentellen kritischen Isothermen erhält man mit $l$ ungefähr $= 3{,}4$.

Die früher erwähnten Regeln von Young und von Reinganum über das Vorzeichen von $\left(\frac{d^2p}{dt^2}\right)_\varrho$ und über die damit zusammenhängende Änderung von $c_v$ mit der Dichte, lassen sich durch diese Form der Gleichung erfüllen. Damit $\left(\frac{d^2p}{dt^2}\right)_\varrho$ für das kritische Volumen o wird, muß:

$$\frac{1}{\Re}\left(\frac{d^2\eta}{d\,t^2}\right)_\varrho = b'' + c''\delta\,(1-\delta) \text{ für } \delta = 1 \text{ gleich o}$$

werden, also:

$$b'' + c''\,(1-1) = 0$$

und weiter

$$b' + c'\cdot(1-1) = K_1$$

$$b + c\cdot(1-1) = \frac{K_1}{t} + K_2.$$

$K_1$ kann man in Beziehung zu dem Spannungskoeffizienten des gesättigten Dampfes im kritischen Punkt bringen, es ist:

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_K = \left(\frac{dp}{dt}\right)_{\varrho,K} = \delta^2\left[-\frac{1}{t}\left(\frac{d\eta}{d\,t^2}\right)_\varrho + \eta\right] =$$

$$= -\Re\,[b_K' + c_K'(1-1)] + 1 = -\Re K_1 + 1$$

$$K_1 = \frac{1}{\Re}\left[1 - \left(\frac{dp}{dt}\right)_K\right].$$

$K_2$ folgt aus dem Ausdruck für $\eta$ im kritischen Punkt:

$$\frac{1}{\Re} = \frac{1}{1-1} + b_K + c_K(1-1) = \frac{1}{1-1} + K_1 + K_2$$

$$K_2 = \frac{1}{\Re}\left(\frac{dp}{dt}\right)_K - \frac{1}{1-1}.$$

Da:

$$\left(\frac{du}{d\varrho}\right)_T = \left(\frac{dy}{d\,1/T}\right)_\varrho \text{ und } \left(\frac{dc_v}{d\varrho}\right)_T = -\frac{1}{T^2}\left(\frac{d^2y}{d\,1/T^2}\right)_\varrho$$

ist, so ergeben die obigen Annahmen für $c_v$ ein Maximum bei der kritischen Dichte und ein Minimum bei $2\varrho_M - \varrho_K$, wie es die Regel von Reinganum verlangt.

Argon verhält sich nach den Versuchen von Kamerlingh-Onnes und Crommelin[1]) anders. Nach diesen Versuchen, die etwas über die kritische Dichte hinausreichen, aber das Minimum von $y$ nicht erreichen, wird $\left(\frac{d^2y}{d\,1/T^2}\right)_\varrho$ für die kritische Dichte nicht gleich Null, $\left(\frac{dc_v}{d\varrho}\right)_T$, das sich bis etwa $\varrho_K$ nur wenig ändert, nimmt von da ab merklich zu. Wollte man dies Verhalten an der Grenze des Versuchsbereiches vernachlässigen, so könnte für diesen Stoff in erster grober Annäherung $\left(\frac{dc_v}{d\varrho}\right)_T$ als

1) Leiden. Comm. Nr. 131.

unabhängig von der Dichte und damit in der Gleichung (19) $c$ als eine lineare Funktion von $\frac{1}{T}$ angenommen werden.

Gleichung (19) und die an sie geknüpften Betrachtungen gelten nur in der Nähe der kritischen Temperatur.

(Eingegangen 12. Mai 1920.)

## Ein Schwingungsapparat für Vorlesung und Praktikum nach H. Th. Simon.

(Mitteilung aus dem Institut für angewandte Elektrizität der Universität Göttingen.)

Von Otto Oldenberg.

Um die in so vielen Gebieten der Physik hervortretenden, typischen Schwingungsvorgänge demonstrieren und ihre Gesetzmäßigkeiten experimentell verfolgen zu können, konstruierte H. Th. Simon vor längerer Zeit den im folgenden beschriebenen Apparat[1]. Dabei leitete ihn der Gesichtspunkt, möglichst mannigfaltige, elektrische Versuche mechanisch nachzubilden, andererseits aber auch Einzelheiten, die sich beim elektrischen Vorgang zunächst der Beobachtung entziehen, die jedoch für das Verständnis wesentlich sind, zur Anschauung zu bringen. Da dieser Demonstrationsapparat sich durch seine Übersichtlichkeit, Präzision und Vielseitigkeit beim Gebrauch in der Vorlesung vortrefflich bewährte, zugleich aber auch einen für das physikalische und elektrotechnische Praktikum äußerst lehrreichen Meßapparat darstellt, entschloß sich Simon, ihn weiteren Kreisen zugänglich zu machen und zu empfehlen[2]. Die Ausführung dieser Absicht war Simon nicht mehr vergönnt. Die folgende kurze Beschreibung des Apparats und seiner Verwendung lehnt sich im Anfang an ein von Simon begonnenes Manuskript an. Eine eingehendere Mitteilung erscheint in der Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterr.

Der Apparat (s. Fig. 1) besitzt zwei gleiche schwingende Systeme, die miteinander gekoppelt werden können. Das einzelne System ist ein der Schwere entzogenes Pendel folgender Konstruktion: Ein Pendelkörper $P$ aus Aluminium ist vertikal stehend auf Schneiden drehbar gelagert. In Schlitzen sind zwei gleiche Bleigewichte $m$ symmetrisch zur Achse festgeklemmt. Ihr Abstand von der Achse ist an einer Skala ablesbar; daraus ist ihr Trägheitsmoment zu berechnen. Die Direktionskraft wird durch die Torsion einer in der Verlängerung der Achse angebrachten Flachfeder aus Uhrfederstahl hervorgebracht, die in einem Klemmklotz $K$ endigt. Dieser Klemmklotz ist in dem längs einer Skala verschiebbaren Lagerbock $L$ vermittelst eines Hebels drehbar, sei aber zunächst durch eine Schraube darin festgeklemmt. Die jeweilige wirksame Länge der Flachfeder, die für den Wert der Direktionskraft bestimmend ist, wird an der Skala abgelesen. Die Dämpfung kann dadurch willkürlich eingestellt werden, daß in den Kreisscheiben der Pendelkörper $P$, die zwischen den Polen von Elektromagneten $M$ schwingen, Wirbelströme induziert werden. Zur absoluten Messung der Direktionskraft der Feder kann dem einen Pendel durch ein Gewicht, das durch einen Faden über eine Rolle hinweg am Pendel angreift, eine dauernde Ablenkung aus seiner Ruhelage erteilt werden.

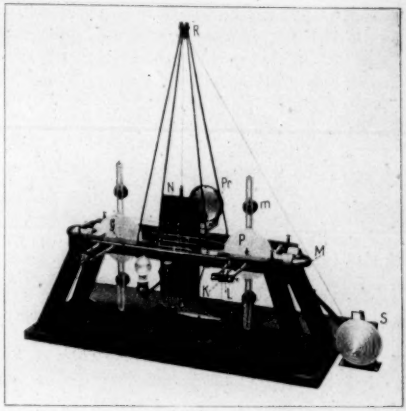



Fig. 1.

Zur Demonstration erzwungener Schwingungen wird an einem der beiden Pendel die Drehung des Klemmklotzes $K$ durch Lockerung der Schraube freigegeben; sodann wird dem mit dem Klemmklotz verbundenen Hebel eine Pendelbewegung von willkürlicher Frequenz durch einen Motor und Excenter aufgezwungen.

Die Koppelung zwischen beiden Pendeln wird durch das Gestänge $G$ hergestellt, dessen senkrechte Hebelarme mit Schlitzen auf die Flachfedern aufgeklemmt werden. Verschieden feste Koppelung kann leicht durch Verschiebung des Gestänges auf den Flachfedern hergestellt

1) Eine andere Konstruktion und Angabe weiterer Literatur s. Breisig, Jahrb. f. drahtl. Tel. 13, 2, 1918.

2) Der Apparat wurde zunächst von dem Institutsmechaniker Herrn W. Müller meisterhaft ausgeführt. Für die Zukunft hat die Firma E. Leybolds Nachf., Köln a. Rh. seine Anfertigung übernommen.

werden. Ein Vorzug dieser Koppelung ist, daß ihre Wirkung ohne weiteres dem Zuhörer anschaulich ist.

Der Ausschlag eines jeden Pendels als Funktion der Zeit kann an der Bogenskala $B$ abgelesen, kann aber zugleich durch eine Schreibvorrichtung auf einer berußten Glasplatte $N$ als Schwingungskurve aufgeschrieben werden. Die Glasplatte $N$ wird durch eine Schnur, die über eine Rolle $R$ hinweg auf der Scheibe $S$ durch ein Uhrwerk aufgerollt wird, gleichförmig bewegt. Diese Kurven können mit Schellack fixiert und wie photographische Negative kopiert werden.

Eine einfache Projektionsvorrichtung $Pr$ gestattet, das Entstehen dieser Schwingungskurven einer beliebig großen Hörerschaft sichtbar zu machen.

Anschließend sei eine Reihe der wesentlichsten Demonstrations- und Praktikumsversuche genannt; ihre eingehendere Beschreibung findet sich in der genannten Arbeit in der Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterr.

Von den Schwingungsgesetzen eines einzelnen schwingenden Systems läßt sich zunächst die Formel für die Eigenschwingungsdauer (entsprechend der Thomsonschen Formel) und für die Dämpfung demonstrieren. In einem Praktikumsversuch kann nach absoluter Messung der Apparatkonstanten der Wert der Eigenschwingungsdauer voraus berechnet werden; der entsprechende elektrische Versuch ist die absolute Eichung eines Wellenmessers durch Messung von Kapazität und Selbstinduktion. Bei der Demonstration erzwungener Schwingungen eines Pendels sieht der Zuhörer die Resonanzkurve entstehen; die Besonderheiten der Phasenverschiebung beiderseits des Resonanzmaximums werden ohne weiteres anschaulich. Dieser selbe Versuch ist im Praktikum zu einer Dämpfungsmessung aus der Resonanzkurve zu verwerten, eine Vorübung zur entsprechenden, wichtigen Messung der drahtlosen Telegraphie. Wird das eine Pendel zunächst festgehalten und dann plötzlich der periodischen Kraft überlassen, beobachten wir einen typischen Einschaltvorgang.

An gekoppelten Systemen lassen sich vor allem die Schwebungen, die nach dem Anstoßen des einen Pendels zustande kommen, demonstrieren, insbesondere auch der Einfluß der mehr oder weniger festen Koppelung auf ihren Verlauf. Die Entstehung einer Schwebung durch Übereinanderlagerung zweier Sinusschwingungen benachbarter Frequenz, die dem Zuhörer wohl zunächst lediglich als Rechenoperation erscheint, wird an unserem Apparat anschaulich dadurch, daß diese beiden Sinusschwingungen jede für sich hergestellt werden können. Hierzu müssen die beiden Pendel gleichzeitig gleich stark angestoßen werden entweder beide in gleichem oder beide in entgegengesetztem Sinne. Dieser mechanische Versuch gibt einen Fingerzeig dafür, wie auch in elektrischen gekoppelten Systemen trotz beliebig fester Koppelung reine Sinusschwingungen anzuregen sind: der gleichzeitige, gleich starke Anstoß geschieht durch eine für beide Kreise gemeinsame Funkenstrecke.

In zwei weiteren Demonstrationsversuchen führt uns der Schwingungsapparat den Zweck der einzelnen Stromkreise einer Sendestation der drahtlosen Telegraphie vor Augen. Zunächst wird die Wirkungsweise der Wienschen Stoßerregung gezeigt, in einem weiteren Versuch der Schwingungsvorgang im Braunschen gekoppelten Sender.

Gegen unseren Schwingungsapparat läßt sich der Einwand erheben, daß seine Koppelung nicht genau der induktiven Koppelung entspricht, die in der drahtlosen Telegraphie weitaus die wichtigste ist[1]). Vielmehr zeigen die Differentialgleichungen, denen die Bewegung unseres Apparates gehorcht, daß seine Koppelung eine genaue, mechanische Nachbildung der kapazitativen Koppelung ist. Um Unterschiede zwischen den Schwingungen unserer gekoppelten Pendel und den elektrischen Schwingungen zweier induktiv gekoppelten Kreise zuverlässig festzustellen, rechnen wir die Bewegung der Pendel durch Integration ihrer Differentialgleichungen aus. Dabei beschränken wir uns zur Vereinfachung auf den Fall, daß die Pendel aufeinander abgestimmt sind und zwar so, daß alle Apparatkonstanten beider Pendel die gleichen sind; jedoch machen wir über die Festigkeit der Koppelung keine beschränkende Annahme. Hier sei nur folgendes Ergebnis mitgeteilt: Die Gleichung unserer mechanischen Schwingung stimmt fast völlig mit der Gleichung der elektrischen Schwingung bei induktiver Koppelung überein. (Der einzige, jedoch ganz unwesentliche Unterschied besteht darin, daß bei induktiver Koppelung die beiden einzelnen Sinusschwingungen, aus denen sich die Schwebung zusammensetzt, verschieden starke Dämpfung haben; bei unserem Apparat sind sie dagegen gleich stark gedämpft.) Damit ist bewiesen, daß unser Apparat auch die Schwingungen induktiv gekoppelter Kreise in den wesentlichen Zügen richtig zur Anschauung bringt.

Weiterhin ergibt die Theorie des Apparates

1) Wegen der Einzelheiten der folgenden Überlegungen sei auf die in der Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterr. erscheinende Arbeit verwiesen.

leicht Formeln, durch die der Schwingungsverlauf in den gekoppelten Systemen und damit auch die Häufigkeit der Schwebungen vollständig voraus berechnet werden kann, wenn einmal die Apparatkonstanten (Trägheitsmoment, Länge und Torsionskonstante der Flachfedern, Ort des Koppelungsgestänges auf den Flachfedern) mit Zentimetermaß und Wage ermittelt sind.

Schließlich sei auf eine andere Verwendung des Apparates hingewiesen, bei der es sich nicht so sehr um die Demonstration physikalischer als vielmehr geometrischer Gesetze handelt, auf die Herstellung Lissajousscher Figuren. Ein Schreibstift, der vor der berußten Glasplatte $N$ (Fig. 1) spielt, wird von dem einen Pendel durch eine Stange horizontal hin und her bewegt. Gleichzeitig bewirkt die Schwingung des anderen Pendels durch Vermittlung eines einfachen Gestänges eine vertikale Schwingung des Schreibstiftes[1]). Infolgedessen beschreibt der Stift eine Lissajoussche Figur. Durch Änderung der Pendelfrequenzen und der Phasen können mannigfaltige, sehr schöne Figuren hergestellt werden. Fig. 2 zeigt hierfür drei Bei-

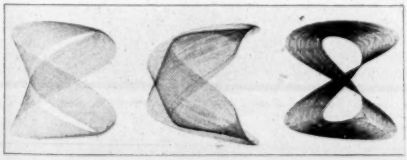


Fig. 2.

spiele mit dem Frequenzverhältnis nahezu 1 : 2, zugleich als Beispiel für die Wirkungsweise der Schreibvorrichtung.

Über die hier geschilderten, wichtigsten Versuche hinaus läßt der Apparat freies Feld für eine weitere, große Reihe mannigfaltiger, lehrreicher Beobachtungen.

## Zusammenfassung.

Ein mechanischer Schwingungsapparat für Vorlesung und Praktikum wird beschrieben. In einer Reihe von Versuchen werden die Schwingungsgesetze eines einzelnen Systems und zweier gekoppelter Systeme demonstriert. Dabei wird auf die mechanische Nachbildung von Versuchen der drahtlosen Telegraphie besonderer Wert gelegt. Der Apparat dient ferner zur Demonstration Lissajousscher Figuren.

Göttingen, Institut für angewandte Elektrizität, April 1920.

(Eingegangen 20. Juni 1920.)

1) Auf Fig. 1 ist auch diese Koppelung angebracht, obwohl sie nicht gleichzeitig mit der gewöhnlichen Koppelung durch das Gestänge $G$ zu verwenden ist.

## Die Anwendung der Smoluchowskischen Theorie auf die zeitliche Veränderlichkeit der Teilchenzahl einer Emulsion.

Von P. C. v. Arkel.

In seinen Studien über „Molekularstatistik von Emulsionen und deren Zusammenhang mit der Brownschen Bewegung", Akad. Wien 1915, 2401 und diese Zeitschr. 1916, Nr. 22 und 23 sagt Smoluchowski, daß ein Vergleich der von ihm aus seiner Theorie abgeleiteten Formeln mit der Svedbergschen Beobachtungsreihe (Existenz der Moleküle, 1912, S. 148) eine recht befriedigende Übereinstimmung ergibt.

Das Ziel dieser Mitteilung ist, nachzuweisen, daß diese Übereinstimmung nicht genügend geachtet werden kann, wenn man alle von Smoluchowski abgeleiteten Beziehungen prüft an dem experimentellen Material. Der Grund davon liegt wahrscheinlich mehr in der Unvollkommenheit der Zahlenreihe als in der Theorie. Smoluchowski leitet für die durchschnittliche, in gewisser Zeit $t$ erfolgende, Veränderung $\triangle$ der Teilchenzahl in einem Elemente, in dem sich anfangs eine Anzahl $n$ aufhält, die Formel

$$\triangle_n = (\nu - n)\, P \qquad (1)$$

ab, in welcher $P$ die Wahrscheinlichkeit ist für den Austritt eines Teilchens, das zur Zeit o in dem Elemente liegt und $\nu$ die Teilchenzahl, welche bei gleichmäßiger Verteilung auf das in Betracht gezogene Volum entfallen würde. Er findet für das durchschnittliche Quadrat der Änderung

$$\triangle^2 = 2\nu P\,. \qquad (2$$

Bei der Svedbergschen Reihe erhält man $\triangle_2 = 2{,}25$, also würde $P = 0{,}726$ betragen.

Wir wollen $P$ berechnen aus der Formel (1). Bei der Berechnung der $\triangle$ kann man die Reihe in zwei Richtungen durchlaufen und der Umkehrbarkeit wegen müssen die in dieser Weise gefundenen $P$-Werte für beide Richtungen dasselbe sein. Wir geben durch einen Pfeil die betreffende Richtung an. So ergibt sich

| | | → | ← |
|---|---|---|---|
| aus $\triangle_0$ | für $P$ | 0,66 | 0,60 |
| $\triangle_1$ | | 0,82 | 0,80 |
| $\triangle_2$ | | 0,60 | 0,65 |
| $\triangle_3$ | | 0,81 | 0,73 |
| $\triangle_4$ | | 0,69 | 0,85 |
| $\triangle_5$ | | 0,81 | 0,70 |

Der größte der hier gefundenen Werte weicht mehr als 30 Proz. ab von dem kleinsten, während eine Abweichung von 10 Proz. von dem oben gefundenen Werte $P = 0{,}726$ nach beiden Seiten vorkommt.

Wir nennen das Zeitintervall (39mal pro Minute) bei den Untersuchungen Svedbergs $\tau$. Wir können aus der gegebenen Zahlenreihe dann auch nachgehen, was $P$ wird nach (1) und (2) bei Zeitintervallen $2\tau$, $3\tau$ usw. Man wird sehen, daß auch dann für $P$ bei einem bestimmten Intervall nicht dieselben Werte erhalten werden. Bei dem Intervall $2\tau$ werden wir aus der gegebenen Zahlenreihe

$$a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ i\ k \text{ usw.}$$

die zwei Teilreihen benutzen müssen

$$a\ c\ e\ g\ i \text{ usw.}$$

und

$$b\ d\ f\ h\ k \text{ usw.,}$$

welche gleichwertig sind, weil ja bei einem Zeitintervalle $2\tau$ eine dieser beiden Reihen von Svedberg beobachtet sein würde, wenn er $2\tau$ als Beobachtungsintervall gewählt hätte. Bei einem Intervall $3\tau$ bekommen wir in dieser Weise die 3 Reihen

$$a\ d\ g\ k \text{ usw.,}$$
$$b\ e\ h \text{ usw. und}$$
$$c\ f\ i \text{ usw.}$$

die auch wieder gleichwertig sind; im allgemeinen bei $m\tau$ also $m$ gleichwertige Teilreihen.

Wir finden nun bei $2\tau$ für $P$ die folgenden Werte, während wir die bei der Berechnung von $\triangle$ gefolgte Richtung wieder mit einem Pfeile angeben:

| | Erste Teilreihe | | $t = 2\tau$ Zweite Teilreihe | |
|---|---|---|---|---|
| aus $\triangle^2$: | 0,885 | | 0,83 | |
| | → | ← | → | ← |
| aus $\triangle_0$: | 0,90 | 0,71 | 0,83 | 0,83 |
| aus $\triangle_1$: | 0,78 | $>1$ | 0,90 | 0,94 |
| aus $\triangle_2$: | 0,77 | $>1$ | 0,79 | 0,42 |
| aus $\triangle_3$: | 0,92 | $>1$ | 0,81 | $>1$ |
| aus $\triangle_4$: | 0,96 | 0,62 | 0,90 | $>1$ |

Die Übereinstimmung ist wieder nicht schön, während die Werte $>1$ für $P$ gar nicht zu verteidigen sind.

Bei dem Intervalle $3\tau$ finden wir für $P$:
Erste Teilreihe: $P$ aus $\overline{\triangle^2} = 0{,}87$
Zweite „ 0,90
Dritte „ 0,79,
während folgende Werte für $P$ berechnet werden aus $\triangle_n$ bei diesem Intervalle:

| | 1. Reihe → | 2. Reihe → | 3. Reihe → | 1. Reihe ← | 2. Reihe ← | 3. Reihe ← |
|---|---|---|---|---|---|---|
| aus $\triangle_0$ | 0,77 | 0,90 | 0,86 | 0,85 | 0,80 | 0,72 |
| „ $\triangle_1$ | $>1$ | 0,93 | 0,89 | 0,77 | $>1$ | 0,94 |
| „ $\triangle_2$ | 0,70 | 1,— | 0,84 | 0,23 | 0,73 | $>1$ |
| „ $\triangle_3$ | 0,85 | 1,— | $>1$ | 1,— | $>1$ | 0,87 |
| „ $\triangle_4$ | 0,63 | 0,78 | 0,62 | 0,89 | 0,75 | 0,78 |

Bei größeren Intervallen berechneten wir noch die $P$-Werte, welche mit $\triangle^2$ folgen:

| | Intervall $4\tau$ | $5\tau$ | $6\tau$ |
|---|---|---|---|
| 1. Teilreihe | 0,93 | 1,— | $>1$ |
| 2. „ | 0,69 | 0,91 | 0,83 |
| 3. „ | 0,84 | 0,90 | 0,94 |
| 4 „ | 0,96 | 0,95 | 0,85 |
| 5. „ | — | 0,78 | $>1$ |
| 6. „ | — | — | 0,82 |

Im allgemeinen ist also bei einem bestimmten Intervall eine in manchen Fällen große Differenz nachzuweisen zwischen den $P$-Werten, namentlich zwischen den, welche aus Formel (1) für $\triangle_n$ hervorgehen, welche eben nicht von Smoluchowski geprüft wurde in dem oben genannten Artikel. Hätte er dies getan, so hätte sich erwiesen, daß die Übereinstimmung, welche er meinte, bestand, in der Tat nicht anwesend ist. Wir können aus diesen Tatsachen auch die Folgerung ziehen, daß es gewissermaßen möglich ist aus einer Zahlenreihe (wie die Svedbergsche) Größen abzuleiten, welche übereinstimmen mit den theoretisch berechneten, doch daß wir in der Formel (1) ein scharfes Kriterium haben, um zu entscheiden, ob auf eine Zahlenreihe die Smoluchowskische Theorie anzuwenden ist und dieses scheint bei der Svedbergschen Reihe also nicht der Fall.

Auch kann noch bemerkt werden, daß die berechneten $P$-Werte sich bei zunehmender Intervallgröße nicht in bestimmter Weise dem Grenzwerte $P = 1$ nähern, was doch der Fall sein muß.

Noch eine andere Formel ist von Smoluchowski abgeleitet worden, nämlich

$$W(n, m) = P\,W(n-1, m) + \\ + (1-P)\,W(n-1, m-1), \qquad (3)$$

wo $W(n, m)$ die Wahrscheinlichkeit ist, daß die Zahl $m$ auf die Zahl $n$ folge. Er gebraucht diese Rekursionsformel zur Berechnung der $W(n, m)$ und findet daraus wieder die theoretisch zu erwartenden Häufigkeitszahlen der verschiedenen Ambo-Gruppen $(n, m)$, welche er vergleicht mit den beobachteten. Wir können in der Svedbergschen Reihe die experimentellen Wahrscheinlichkeiten $W(n, m)$ bestimmen und mit Hilfe von (3) $P$ berechnen. Wir finden $P$-Werte berechnet aus Formeln (3) für $W(n, m)$

| $t=\tau$ | $m=$ 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=$ 1 | 0,786 | 0,500 | 0,620 | 0,111 | 0,867 | — |
| 2 | 0,901 | 0,703 | 0,408 | $>1$ | 0,818 | $<0$ |
| 3 | $>1$ | 0,130 | 0,970 | 0,820 | $>1$ | $>1$ |
| 4 | 0,662 | $>1$ | 0,717 | 0, — | 0,125 | — |
| 5 | 0,733 | $>1$ | $<0$ | 0 | $>1$ | — |

Während die so berechneten $P$-Werte alle dasselbe liefern sollten für einen bestimmten Intervall (hier $1\tau$), sind leider sehr große Differenzen nachzuweisen.

Noch sei mitgeteilt, daß eine zweite von Svedberg gegebene Reihe (Existenz der Moleküle) dieselben schlechten Resultate gab.

Universität Utrecht, Institut für theoretische Naturkunde, April 1920.

(Eingegangen 15. Juni 1920.)

## Die Energieverhältnisse in einem Stromkreise mit Selbstinduktion.

Von P. Terpstra.

Wenn in einem Stromkreise mit einem Widerstand $R$ und einer Selbstinduktion $L$ eine konstante elektromotorische Kraft $V$ eingeschaltet wird, so gilt für die Stromstärke die Gleichung

$$i = \frac{V - L\frac{di}{dt}}{R}.$$

Diese Gleichung läßt sich leicht umformen zu:

$$Vidt = i^2 R dt + iL\frac{di}{dt}dt,$$

d. h. die Arbeit, die von der elektromotorischen Kraft $V$ geleistet wird = Wärmeentwicklung in dem Stromkreise + Arbeit gegen die „elektromotorische Gegenkraft". Letztere findet sich im Äther wieder als magnetische Energie $M_0$. Von diesen Energieverhältnissen liefert die Fig. 1 ein anschauliches Bild. Die Kurve $OPA$ in der Ebene $iOt$ stellt den Verlauf der Stromstärke dar, und ebenso die Kurve $Vst$ in der Ebene $VOt$ den der „elektromotorischen Gegenkraft". Man denke sich nun einen senkrechten Zylinder, der $OPA$ und einen wagerechten Zylinder, der $Vst$ als Leitlinie hat. Der Punkt $R$ z. B. wird dann ein Punkt der Schnittkurve dieser zwei Zylinder sein. Der über der Ebene $iOt$ liegende gemeinsame Teil der beiden Zylinder stellt dann die magnetische Energie $M_0$ dar. Ergibt sich doch für den Inhalt dieses Teiles: $\int_0^\infty PQSRdt =$

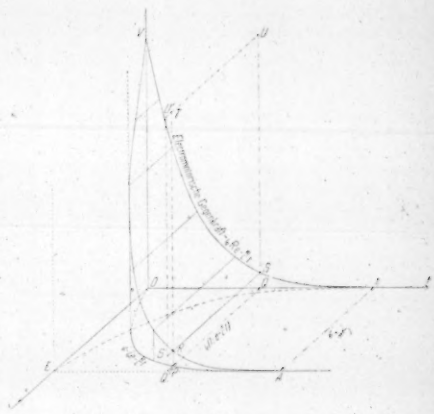



Fig. 1.

$= \int_0^\infty$ Stromstärke $\times$ elektromotorische Gegenkraft $\times dt =$ Arbeit, die nötig ist zum Überwinden der elektromotorischen Gegenkraft = im Felde aufgespeicherte magnetische Energie $M_0$. Aus den in der Figur angegebenen Werten der Stromstärke und der elektromotorischen Gegenkraft ergibt sich, daß

$$M_0 = \int_0^\infty PQSRdt =$$

$$= \int_0^\infty i_0^2 R\,(e^{-\frac{R}{L}t} - e^{-\frac{2R}{L}t})\,dt =$$

$$= i_0^2 R\left(\frac{L}{R} - \frac{L}{2R}\right) = {}^1\!/_2 L i_0^2.$$

In derselben Weise findet man für den Raum, der durch die drei Koordinatenebenen, eine Ebene in $E \perp Oi$ und den horizontalen Zylinder begrenzt wird, als Inhalt $Li_0^2$. Dieser Raum wird also von dem vertikalen Zylinder $OPA$ in zwei gleiche Teile geteilt. Dieses Resultat kann symbolisch durch die Gleichung

$$[PRS'Q'] = [PQSR]$$

wiedergegeben werden. In derselben Weise halbiert der horizontale Zylinder den Raum der von dem vertikalen Zylinder und von den Ebenen $tOi$, $iOV$, der Ebene in $E \perp Oi$ und der horizontalen Ebene durch $UT$ eingeschlossen wird: oder

$$[PRS'Q'] = [S'RTU'],$$

so daß also

$$[PQSR] = [PRS'Q'] = [S'RTU'] = {}^1\!/_2 L i_0^2.$$

Ebenso wie $PQSR \cdot dt$ die in $dt$ im Äther aufgenommene magnetische Energie be-

deutet, stellt $PQUT \cdot dt$ die von der konstanten elektromotorischen Kraft geleistete Arbeit und also $RSUT \cdot dt$ die entwickelte Wärme dar. Die Figur zeigt deutlich, wie nach dem Schließen des Stromes die Arbeit, die die konstante elektromotorische Kraft pro Zeiteinheit leistet, allmählich zunimmt und wie zu gleicher Zeit der Bruchteil, der davon im Felde aufgespeichert wird, allmählich abnimmt, bis, wenn der Strom konstant geworden ist, alle Stromenergie in Wärme umgewandelt wird. In Fig. 2

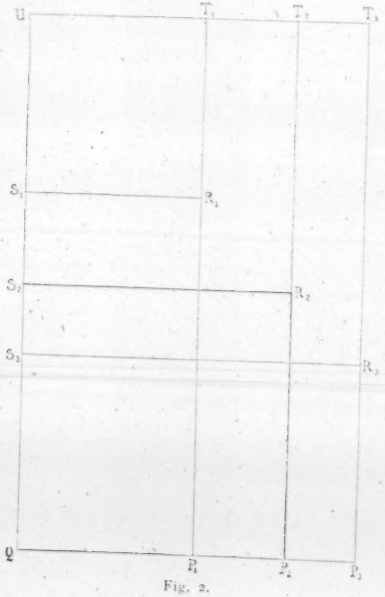



Fig. 2.

sind für den Fall $R = 1\,\Omega$, $i_0 = 1$ Amp., $L = 0{,}01$ Henry diese Durchschnitte dargestellt in den Augenblicken $t_1 = 0{,}004$ Sek.; $t_2 = 0{,}007$ Sek. und $t_3 = 0{,}010$ Sek. Das die magnetische Energie bezeichnende Rechteck $QS_1R_1P_1$ geht über in das Quadrat $QS_2R_2P_2$ (maximaler Durchschnitt) usw.

Mittels der obengenannten Halbierungseigenschaften kann man aus der Fig. 1 zugleich den Zusammenhang herleiten zwischen der Wärmeentwicklung in dem betrachteten Stromkreise und dem Wärmeeffekt, der auftreten würde, wenn unter übrigens gleichen Umständen der Stromleiter induktionsfrei gewickelt wäre. In diesem Falle hat der Strom von Anfang an die volle Stärke $i_0$, während die elektromotorische Gegenkraft immer gleich null ist, so daß die ganze von der elektromotorischen Kraft $V$ geleistete Arbeit in Wärme umgesetzt wird. In Fig. 1 wird diese Wärmemenge durch das Parallelepiped $OEAt_1V$, oder $[QQ'U'U]$ dargestellt. Die im Falle $L \neq 0$ auftretende Wärmeentwicklung wird durch $[UTRS]$ wiedergegeben, die in diesem Falle von der elektromotorischen Kraft geleistete Arbeit durch $[UTPQ]$. Aus der Figur sieht man also, daß zwischen den beiden Fällen folgender Zusammenhang besteht: Wenn $L \neq 0$, dann leistet die elektromotorische Kraft $V$ weniger Arbeit als im Falle $L = 0$, und zwar

$2 \times {}^1/_2 Li^2$ weniger; $[[PRS'Q'] + [S'RTU']]$,

die Wärmeentwicklung ist im ersten Falle aber $3 \times {}^1/_2 Li^2$ weniger, $[[PRS'Q'] + [S'RTU'] + [PQSR]]$,

so daß dabei doch noch ${}^1/_2 Li^2$ als magnetische Energie im Äther aufgenommen werden kann.

Es ist interessant, als zweiten äußersten Fall den Fall $R = 0$ zu betrachten; d. h. also den Fall eines supraleitenden Kreises, in dem eine konstante elektromotorische Kraft eingeschaltet worden ist. Man kann sich dafür z. B. ein bleiernes, in sich selbst geschlossenes Solenoid denken, das sich in flüssigem Helium zwischen den Polen eines Elektromagnets befindet, während das von letzterem an der Stelle der Spirale erzeugte magnetische Feld allmählich abgeschwächt wird. Da $R = 0$, ist die Joule-Wärme in diesem Falle notwendigerweise gleich null, so daß also in Fig. 1 $[UTRS] = 0$ werden

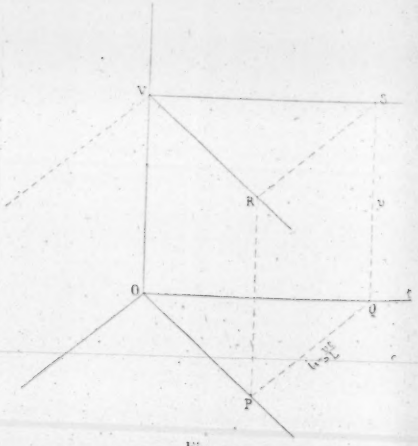



Fig. 3.

muß, d. h. der horizontale Zylinder muß eine horizontale Ebene werden, die Kurve $Vst$ eine horizontale Gerade durch den Punkt $V$. Das bedeutet, daß die elektromotorische Gegenkraft fortwährend der konstanten elektromotorischen Kraft gleich ist, ebenso wie in der Mechanik, wenn die Reibung gleich null ist, fortwährend Masse $\times$ Beschleunigung = Kraft ist[1]). Die von einer konstanten Kraft erzeugte gleichförmige beschleunigte Bewegung findet im elektrischen Falle ihr Analogon in der gleichmäßig ansteigenden Stromstärke. Die Kurve $OPA$ wird also eine Gerade durch $O$ werden.

Tatsächlich ist $\lim_{R=0} i_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{vt}{L}$.

1) Diese Übereinstimmung ist weiter ausgearbeitet von Lippmann, C. R. **109**, 1889.

Der Raum $[PQSR]$, der die magnetische Energie darstellt, wird also in diesem Falle ein dreieckiges Prisma (Fig. 3), von dem man sofort einsieht, daß der Inhalt gleich

$$^1/_2 i \times t \times V = {}^1/_2 i \times Li = {}^1/_2 Li^2 \text{ ist.}$$

Wenn man von der experimentellen Tatsache ausgeht, daß die Induktionserscheinungen unabhängig sind von der chemischen Art, also auch von dem Widerstand der Leiter, so daß die magnetische Energie in einem willkürlichen Falle der magnetischen Energie des supraleitenden Stromkreises gleich sein muß, so enthält obiges einen sehr einfachen graphischen Beweis für den Satz $M_0 = {}^1/_2 Li^2$.

Groningen, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 10. Mai 1920.)

# ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

## Neuere Arbeiten über Beugung an Zylindern und Gittern.

Von H. Spohn.

(Fortsetzung.)

Der Faktor 2 auf der rechten Seite von (6c) ist für $m = 0$ zu streichen. Es ist $\varkappa_1 = p_{1r=\varrho}$; $\varkappa_2 = p_{2r=\varrho}$; die für den Vorgang im Innern des Zylinders kennzeichnenden Koeffizienten $b_m$ werden weiterhin explizite nicht benutzt. Der Punkt über den Funktionen $J$ bzw. $H$ bedeutet, daß die Ableitung dieser Funktionen nach dem Argument $p_1$ bzw. $p_2$ zu nehmen ist.

Für die zeitlichen Mittelwerte der vom Zylinder ausgestrahlten Energie $E_2$ und der von ihm absorbierten $E_3$ ergibt sich mit Hilfe von (6a) bis (6c):

$$E_2 = -\frac{\lambda}{16c}\left[\alpha^2_0 + \beta^2_0 + \sum_1^\infty (\alpha^2_m + \beta^2)_m\right] \quad (6d)$$

$$E_3 = +\frac{\lambda}{16c}\left[\frac{2}{\pi}\beta_0 + \frac{4}{\pi}\sum_1^\infty \beta_m\right] \quad (6e)$$

wenn $-\frac{2i}{\pi} a_m = \alpha_m + i\beta_m$ gesetzt wird.

Unter der — weiterhin erfüllten — Voraussetzung der Konvergenz ist mit den Reihen (6) die Lösung des zunächst vorgelegten Problems fertig.

Die Form der Lösung als unendliche Reihe, der verwickelte Aufbau der Koeffizienten $Q_m$ verlangt zur Ermöglichung einer ins einzelne gehenden Diskussion natürlich geeignet gewählte Spezialisierungen, die die Beschränkung auf nur wenige Glieder der Reihe und einfache Koeffizientenwerte ermöglichen.

Vorher aber können doch schon aus der allgemeinen Form eine Reihe wertvoller Einzelergebnisse abgelesen werden.

Zunächst ist es möglich, einen Einblick in den inneren Mechanismus des Vorganges zu gewinnen[17], der durch das Einbringen des Zylinders in den Strahlengang erzwungen wird: Schon die unmittelbare Anschauung läßt erkennen, daß als Folgeerscheinung der Grenzbedingungen beim Einfallen elektromagnetischer Energie an der Zylinderoberfläche elektrische Ladungen gestaut werden müssen, und zwar jedenfalls zeitlich veränderliche Ladungen, da ja die einfallende Energie zeitlich veränderlich ist, d. h. an der Grenzfläche müssen elektrische Strömungen auftreten, gleichviel ob der begrenzende Zylinder dielektrisch oder leitend ist. Über die Natur dieser Strömungen unterrichtet hier am besten ihr magnetisches Feld, und zwar das magnetische Feld in der nächsten Umgebung des Zylinders.

In hinreichender Nähe des Zylinders ist aber, wenn $\varrho << \lambda$ (eine Einschränkung, deren Bedeutung weiterhin noch vielfach hervortreten wird), jedenfalls $p_1 = k_1 r$ beliebig klein; und daher dürfen dort die zweiten Hankelschen Funktionen $H^{(2)}_m$, die den Störungsanteil im Außenraum kennzeichnen, durch ihre Näherungswerte für sehr kleines Argument ersetzt werden; das sind die Werte:

$$\lim H^{(2)}{}_0(x) = -\frac{2i}{\pi x}, \qquad \lim H^{(2)}{}_1(x) = -\frac{2i}{\pi x^2},$$

$$\lim H^{(2)}{}_2(x) = -\frac{8i}{\pi x^3}, \text{ usf.}$$

Mit dieser Ersetzung wird Glied für Glied des Störungsfeldes einer einfachen physikalischen Deutung fähig. Aus der Lösung (6a) für den elektrischen Vektor folgt nämlich vermöge (1c) durch Differentiation nach $r$ und folgende Integration nach $t$ für den hier allein interessierenden Störungsanteil:

$$\mathfrak{H}_\varphi = -i c e^{int} \Sigma a_m \dot{H}^{(2)}{}_m(p_1) \cdot \cos m\varphi,$$

also nach der angezeigten Ersetzung für das Feld der ersten Partialwelle:

$$\mathfrak{H}_{\varphi 0} = -\frac{2a_0}{\pi k_1 r} e^{int}.$$

Das ist aber offenbar das magnetische Feld eines unendlich langen Wechselstromes.

Das zweite Glied wird:

$$\mathfrak{H}_{\varphi 1} = -\frac{2a_1}{\pi k_1{}^2} \frac{1}{r^2} e^{int} \cos\varphi$$

$$= -\frac{2a_1}{\pi k_1{}^2} e^{int} \frac{1}{r^2} \frac{x}{r} = +\frac{2a_1}{\pi k_1{}^2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) e^{int}.$$

Nun ist das Feld zweier paralleler, entgegengesetzt gerichteter Ströme, deren Querschnittsmittelpunkte um das sehr kleine Stück $h$ gegeneinander verschoben sind:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{x+h} - \left(\frac{1}{r}\right) = h \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right),$$

wenn $h$ klein genug ist, um das Abbrechen der zugehörigen Entwicklung nach Taylor mit dem ersten Gliede zu gestatten. (Siehe Fig. 2.)

Fig. 2.

Die zweite Partialwelle kann also auf die Wirkung eines „Doppelwechselstromes" zurückgeführt werden.

Ebenso läßt sich

$$\mathfrak{H}_{\varphi 2} = -\frac{8a_2}{\pi k_1{}^3} e^{int} \frac{1}{r^3} \cos 2\varphi$$

$$= \frac{8}{3\pi k_1{}^3}\left(\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2}\right) e^{int}$$

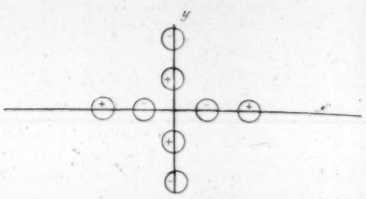



Fig. 3.

schreiben, und dieser Ausdruck entspricht dem Felde von vier Doppelströmen, die in folgender Weise angeordnet sind (Fig. 3).

Hier ist eine zweimalige Verschiebung eingetreten, sowohl in Richtung der $x$-Achse wie auch der $y$-Achse, aber, wie das wechselnde Vorzeichen zeigt, in beiden Richtungen im entgegengesetzten Sinne. (Das Feld eines Doppelstromes war proportional $h\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$; werden also zwei Doppelströme gegeneinander verschoben, so ist auf der $x$-Achse

$$h\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)_{x+h} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)_x\right| = h^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}$$

und entsprechend auf der $y$-Achse.)

Ganz entsprechend können die höheren Glieder gedeutet werden, ein vollkommenes Analogon für das Auftreten der „Dipole" bei bekannten anderen Problemstellungen [7], mit denen der nähere Zusammenhang im folgenden Paragraphen besprochen werden soll bei Gelegenheit besonderer Dispersionserscheinungen.

Dabei wird die hier entwickelte Deutungsmöglichkeit besonders nützlich.

Auch über die meßbaren Erscheinungen des vorgelegten Problems können aus der Lösung (6) schon ohne Berechnung einige besondere Aussagen herausgelesen werden, unabhängig von den weiterhin sehr wesentlichen Unterscheidungen, ob der Zylinder dielektrisch oder leitend, die Wellenlänge groß oder klein im Vergleich zum Zylinderradius ist.

a) Die Koeffizienten $a_m$ hängen nach (6c) nur von den Größen $\pi_1 = \pi\varrho\lambda$ (die D.-K. des Außenraumes $= 1$ gesetzt) und

$$\pi_2 = 2\pi \frac{\varrho}{\lambda}\sqrt{\varepsilon},$$

also solange $\varepsilon$ konstant ist bzw. gehalten werden kann, nur vom Verhältnisse $\varrho/\lambda$, nicht von $\varrho$ und $\lambda$ einzeln ab. Also gilt innerhalb der Gebiete von der Wellenlänge praktisch unabhängiger D.-K., d. h. experimentell für weite Bereiche bei dielektrischen Zylindern und für ab-

solut leitende Zylinder, der folgende Ähnlichkeitssatz [14]:

Die Koeffizienten $a_m$, d. h. die Qualitäten der Erscheinung, bleiben dieselben, wenn Zylinderradius und Wellenlänge im nämlichen Verhältnisse geändert werden, vorausgesetzt, daß dabei die D.-K. konstant bleibt. Die Wirksamkeit dieses Satzes wird weiterhin noch mehrfach in Erscheinung treten.

Wo diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, wird natürlich der Ablauf der Erscheinung erheblich verwickelter. Dort hat dann speziellere Diskussion einzusetzen.

b) Die messende Beobachtung wird nun i. a. aus meßtechnischen Gründen in erheblicher Entfernung vom Zylinder erfolgen, d. h. in Punkten, für welche $p_1$ eine sehr große Zahl wird. Für großes Argument (mit bedeutender Näherung schon für $p = 5$) kann die zweite Hankelsche Funktion durch den Näherungsausdruck ersetzt werden:

$$\lim_{x=\infty} H_m^{(1)}(x) = i^m \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i(x-\pi/4)},$$

also wird nach (6a)

$$\mathfrak{E}_1 = e^{int}\{e^{ip_1\cos\varphi} + e^{i(\pi/4-p_1)} \Sigma i^m a_m \cos m\varphi\},$$

oder

$$\text{pars real } \mathfrak{E}_1 = \cos[nt + p_1\cos\varphi] + \sqrt{\frac{2}{\pi p_1}}\{B_\varphi \sin[nt - p_1 + \pi/4] + A_\varphi \cos[nt - p_1 + \pi/4]\},$$

wo zur Abkürzung

$$\Sigma i^m a_m \cos m\varphi = A_\varphi - iB_\varphi$$

gesetzt ist.

Bei den durchgeführten Messungen wurde stets der zeitliche Mittelwert der zuletzt hingeschriebenen Größen gemessen, d. h.

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mathfrak{E}_1^2\, dt = \overline{\mathfrak{E}^2},$$

und für diesen folgt aus der letzten Formel [14]:

$$\overline{\mathfrak{E}^2} = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{3}{\pi p_1}(A_\varphi^2 + B_\varphi^2) + 2\sqrt{\frac{2}{\pi p_1}}\left|A_\varphi \cos\left(\pi/4 - 2p_1\cos^2\frac{\varphi}{2}\right) + B_\varphi \sin\left(\pi/4 - 2p_1\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)\right|\right]. \quad (7)$$

Der dritte Summand rechts ist außer für $\varphi = \pi$ eine periodische Funktion der Entfernung vom Ursprunge, d. h. also: es bilden sich Interferenzen aus, außer hinter dem Zylinder in der Richtung der erregenden Welle. Die Intensitätsmaxima folgen am dichtesten aufeinander vor dem Zylinder in der Richtung der erregenden Welle (d. h. $\varphi = 0$), nämlich im Abstande $\frac{\lambda}{2}$; seitlich vom Zylinder (für $\varphi = \frac{\pi}{2}$) wird dieser Abstand gerade eine volle Wellenlänge. Die Intensität der Interferenzerscheinungen nimmt ab wie $r^{-\frac{1}{2}}$. Die Interferenzstreifen verschieben sich sowohl, wenn bei konstanter D.-K. das Verhältnis $\varrho/\lambda$, wie auch, wenn bei festgehaltenem $\varrho$ und $\lambda$ das Material des Zylinders geändert wird. Namentlich dieses Ergebnis reicht über die Ergebnisse der alten Beugungstheorie hinaus.

Für $\varphi = \pi$, d. h. hinter dem Zylinder, sind drei Fälle auseinanderzuhalten [14]: hier ist

$$\overline{\mathfrak{E}_1^2}_{\varphi=\pi} = \frac{1}{2}\left[1 + \lambda\frac{A_\pi^2 + B_\pi^2}{\pi^2}\frac{1}{r} + (2\lambda)^{\frac{3}{2}}\frac{A_\pi + B_\pi}{\pi}\frac{r}{\sqrt{r}}\right]. \quad (8)$$

I. $A_\pi + B_\pi > 0$; dann ist der ganze Klammerausdruck positiv und größer als 1. Berücksichtigt man, daß bei „freier" Strahlung die Ausdrücke mit $A_\pi$ und $B_\pi$ gar nicht vorhanden sind, der Klammerausdruck also $= 1$ ist, so erkennt man: In diesem Falle wird durch das Einbringen des Zylinders in den Strahlengang eine Verstärkung der Strahlung erzeugt, die mit wachsendem $r$ sich der Null nähert (Typus I).

II. $A_\pi = B_\pi < 0$ und schon für $r = \varrho$, a fortiori für $r > \varrho$ gelte die Umgleichung:

$$|A_\pi + B_\pi| > \sqrt{\frac{\lambda}{2r}}\frac{A_\pi^2 + B_\pi^2}{\pi}.$$

Dann ist der Klammerausdruck in (8) stets $< 1$, d. h.: Hinter dem Zylinder entsteht jetzt eine Schwächung („Schatten"), die mit wachsendem $r$ sich der Null nähert.

Jedoch ist hierbei im Vergleich mit I zu beachten, daß die Schattenwirkung nicht von vornherein monoton mit $r$ abnehmen muß, sondern i. a. an der Stelle

$$r = \frac{2\lambda}{\pi}\left(\frac{A_\pi^2 + B_\pi^2}{A_\pi + B_\pi}\right)^2$$

durch ein Maximum hindurchgeht (Typus II).

III. $A_\pi + B_\pi < 0$, aber für $r = \varrho$ sei

$$|A_\pi + B_\pi| < \sqrt{\frac{\lambda}{2r}}\frac{A_\pi^2 + B_\pi^2}{\pi}.$$

Der Klammerausdruck in (8) ist dann zunächst $> 1$, wird für ein bestimmtes $r = r_0$ selbst $= 1$ und danach, d. h. für $r > r_0$ wieder $< 1$. Also gilt:

1. Für $r < r_0$ wird die Strahlung hinter dem Zylinder verstärkt.

2. Für $r = r_0$ herrscht die ursprüngliche Helligkeit.

3. Für $r > r_0$ herrscht asymptotisch verschwindender Schatten.

Der Punkt $r = r_0$ soll der „Indifferenzpunkt" genannt werden. Seine Lage ist der Definition zufolge bestimmt durch

$$r_0 = \frac{\lambda}{2\pi^2}\left(\frac{A_x^2 + B_x^2}{A_x + B_x}\right) \qquad (9)$$

(Typus III).

(Fortsetzung folgt.)

## Tagesereignisse.

### Naturforscher-Versammlung in Nauheim.

In Ergänzung der Angaben diese Zeitschr. **21**, 392, 1920 und **21**, 447, 1920, kann noch Folgendes mitgeteilt werden.

An Vorträgen sind nachträglich gemeldet: **28.** H. Weyl (Zürich): Elektrizität und Gravitation, **29.** G. Mie (Halle): Das elektrische Feld eines um ein Gravitationszentrum rotierenden geladenen Partikelchens, **30.** M. v. Laue (Berlin): Über neuere Versuche zur Optik bewegter Körper, **31.** H. Rudolph (Coblenz): Die Masse der Sonne in ihrer Beziehung zur Herkunft der Sonnenenergie, **32.** F. Skaupy (Berlin): Elektrizitätsleitung und Konstitution flüssiger Metalle und Legierungen, **33.** E. Wagner (München): a) Präzisionsmessungen der Quantenkonstante $h$, b) Das kontinuierliche Röntgenspektrum, **34.** W. Hallwachs (Dresden): Über Lichtelektrizität, **35.** F. G. Archenhold (Treptow): Umkehrung der $C$-Linie im Sonnenspektrum, **36.** H. Schering (Leutzsch bei Leipzig): Photometer der Firma Goerz zur Messung schwacher Lichtquellen, speziell zur Sternphotometrie, **37.** L. C. Glaser (Berlin): a) Technische Spektralanalyse, b) Optische Beugungsgitter, **38.** W. Nernst (Berlin): a) Zur experimentellen Prüfung der Strahlungsformel, b) Beiträge zur Kenntnis der photochemischen Prozesse, **39.** P. Debye (Zürich): Zerstreuung von Röntgenstrahlen durch Flüssigkeiten, **40.** F. Dammeyer (Hamburg): Über Elektrizität als Kraftquelle auf Leuchtschiffen mit besonderer Berücksichtigung optischer und elektrischer Probleme, **41.** B. Rosenbaum (Berlin): Neuere Ergebnisse der Funkentelegraphie und Vakuumröhren, **42.** S. Herweg (Halle): Die Dipole in flüssigen Dielektrizis.

Die zeitliche Einteilung ist die folgende:

Montag, 20. Sept. Vorstandssitzung, Dienstag, 21. Sept. vorm. Zusammenfassende aneinander anschließende Vorträge: Neuere Forschungen über den Bau der Moleküle und Atome von P. Debye (Zürich), W. Kossel (München) und J. Frank (Berlin); nachm. Geschäftssitzung der D. Phys. Ges., Mittwoch, 22. Sept. vorm. Vortrag von Timerding (Braunschweig): Die Reichsschulkonferenz und der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht an den höheren Schulen; nachm., sowie Donnerstag, 23. Sept. vorm. und nachm., Freitag, 24. Sept. vorm. und nachm. Sitzungen der physikalischen Abteilung.

Wünsche in bezug auf Veranstaltung der Vorträge zu richten an Studienrat Dr. Schäfer, Lehrerseminar in Friedberg; Wohnungskarten abzuholen in Seegers Hotel Imperial; Valutaaufschläge für Ausländer werden nicht berechnet.

Ein kurzes Protokoll der Sitzungen erscheint in den Verhandlungen der D. phys. Ges., der ausführliche Bericht der Vorträge und Diskussionen wird von der Physik. Zeitschrift, alter Gewohnheit gemäß, in einer besonderen Nummer gebracht.

**Physiker-Kongreß in Moskau.** Ein 1919 in Petrograd abgehaltener Physiker-Kongreß hat den „Verein russischer Physiker" gegründet mit dem Ziel: „die Bedingungen der wissenschaftlichen Arbeit zu erleichtern, die Beziehungen zwischen den Gelehrten zu fördern, die Vereinheitlichung und Verbreitung der wissenschaftlichen Publikationen zu bewirken". Vom 1. bis 6. September 1920 findet der erste Kongreß dieses Vereins in Moskau statt unter dem Ehrenpräsidium von A. A. Eichenwald und dem Präsidium von G. W. Wulf. Teilnehmer haben sich zu wenden an das Organisationskomitee Moskau, Moskowaja, Physik. Inst. d. Universität, welches die Quartierzettel verteilt und jedem Teilnehmer 12 000 Rubel aushändigt zur Bestreitung seiner Kosten. Der Verein strebt u. a. an: „die Erlangung ausländischer, wissenschaftlicher Literatur und die Herstellung der Beziehungen mit ausländischen Gelehrten und wissenschaftlichen Instituten".

**Preis George Montefiore.** Das „Institut electrotechnique Montefiore" in Lüttich, Rue Saint Gilles 31 schreibt für das Jahr 1921 einen internationalen Preis aus im Betrage von etwa 4500 frcs. Preisgekrönt wird die beste Originalarbeit über die wissenschaftlichen Fortschritte und die technischen Anwendungen der Elektrizität. Populäre oder Sammel-Schriften sind ausgeschlossen. Die einzureichenden Arbeiten müssen französisch oder englisch abgefaßt sein und gedruckt oder mit der Maschine geschrieben eingereicht werden.

## Personalien.

**(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)**

**Ernannt:** Der a. o. Professor an der Universität Tübingen Dr. Rudolf Weinland zum ord. Professor für angewandte Chemie an der Universität Würzburg, Dr. J. E. Coates von der Universität Birmingham zum Professor für Chemie an der Universität Swansea, der Privatdozent an der Universität Berlin Professor Dr. James Franck zum ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Göttingen, die a. o. Professoren an der Universität Breslau Dr. Erich Waetzmann (Physik) und Dr. Julius Meyer (Chemie) zu ordentlichen Professoren an der gleichen Hochschule.

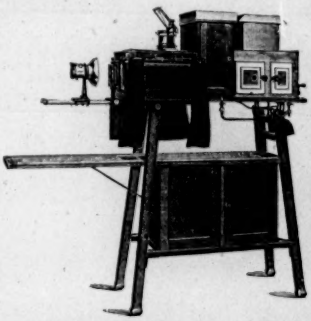
Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. P. Debye in Zürich. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

# MAX KOHL A.G. Chemnitz

Volleingezahltes
= Kapital =
Mk. 1600000.

Physikalische Apparate
Funken-Induktoren
Ölluftpumpen
Experimentier-Schalttafeln
Projektions-Apparate
Laboratorienmöbel
in gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel 1910: 4 Große Preise; Turin 1911: 2 Große Preise; Dresden 1911: Großer Preis.



**Kleines Megadiaskop.** Projektions-Apparat für alle im Unterricht gebräuchlichen Projektionsarten, z. B. für durchfallendes Licht, für auffallendes Licht, für Mikroprojektion, Spektral-, Polarisations-Interferenzerscheinungen usw.

# Zu verkaufen:

**1 Funkeninduktor** (Hochstrom für FT.), 110 Volt, prim., ohne Kapaz. und Unterbr. (65×20 cm Sek.-Spule); **1 Turbinenunterbrecher** AEG. mit Gl.-Motor 65 Volt, ohne Hg; **1 Drehkondensator** für FT.; **1 Hitzdrahtamperemeter** (f. Antenne) Hartmann & Br. 0,53 Amp.; **1 Präz. Gl. Volt-Amp. Meter** S. & H., 3, 15, 150 Volt, 0,15, 1,5, 15 Amp.; **1 Gl. Voltmeter** (Igel) in Lederetui ±60 Volt u. ±10 Amp. Sämtlich gebraucht, aber sehr gut erhalten. Anfragen erbeten unter **S. H. 568** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel) in Leipzig, Königstraße 2.

Verlag von S. HIRZEL in LEIPZIG

# FLIEGER-KRAFTLEHRE

von

## OTTO WIENER

Mit 170 Abbildungen

Preis: 24 Mark, gebunden 32 Mark

Der angesehene Physiker an der Leipziger Universität bietet hier ein Werk, das im Gegensatz zu den bisher vorhandenen Büchern die grundlegenden Vorgänge, deren Verständnis für den Flieger wichtig ist, ohne verwickelte Formeln und unter tunlichster Vermeidung von Fremdwörtern allgemeinverständlich klarlegt. Dem Physiker, der sich rasch über die Flugfrage unterrichten will, sei das Buch warm empfohlen.

## Inhaltsverzeichnis:

(Z. B. = Zusammenfassende Bearbeitungen.)


Seite

Aluminiumzelle: Die Polarität einer —. Erste Mitteilung, v. F. Streintz . . . . . 477
Beugung: Neuere Arbeiten über — an Zylindern und Gittern, v. H. Spohn. (Z. B.) Fortsetzung . . 501
**Dingler, H.**, Der starre Körper . . . . . 487
Elektrische Figuren: Über die —. II. Mitteilung, v. K. Przibram . . . . . 480
Entfernte Objekte: Über die scheinbare Verkleinerung —, v. K. Horovitz . . . . . 499
Farbenlehre: Beiträge zur — III., v. K. W. F. Kohlrausch . . . . . 473
Gestirne: Über eine physiologische Erklärung der Referenzflächen der —, v. A. Müller . . . . . 497
Gitter: Neuere Arbeiten über Beugung an Zylindern und —, v. H. Spohn. (Z. B.) Fortsetzung . . 501
**Horovitz, K.**, Über die scheinbare Verkleinerung entfernter Objekte . . . . . 499
**Kohlrausch, K. W. F.**, Beiträge zur Farbenlehre. III. 473
Kolorimetrische Untersuchungen VI., v. O. Meißner 493
Körper: Der starre —, v. H. Dingler . . . . . 487
**Kretschmann, E.**, Der Liouvillesche Satz und die Relativitätstheorie . . . . . 484
Liouvillescher Satz: Der — und die Relativitätstheorie, v. E. Kretschmann . . . . . 484
**Meißner, O.**, Kolorimetrische Untersuchungen. VI. 493
Molekulargitter: Über die Möglichkeit der optischen Abbildung von —, v. M. Wolfke . . . . . 495
**Müller, A.**, Über eine physiologische Erklärung der Referenzflächen der Gestirne . . . . . 497
Polarität: Die — einer Aluminiumzelle. Erste Mitteilung, v. F. Streintz . . . . . 477
**Przibram, K.**, Über die elektrischen Figuren. II. Mitteilung . . . . . 480
Referenzflächen: Über eine physiologische Erklärung der — der Gestirne, v. A. Müller . . . . . 497
Relativitätstheorie: Der Liouvillesche Satz und die —, v. E. Kretschmann . . . . . 484
**Spohn, H.**, Neuere Arbeiten über Beugung an Zylindern und Gittern. (Z. B.) Fortsetzung . . . . . 501
**Streintz, F.**, Die Polarität einer Aluminiumzelle. Erste Mitteilung . . . . . 477

Seite

Verkleinerung: Über die scheinbare — entfernter Objekte, v. K. Horovitz . . . . . 499
**Wolfke, M.**, Über die Möglichkeit der optischen Abbildung von Molekulargittern . . . . . 495
Zylinder: Neuere Arbeiten über Beugung an — und Gittern, v. H. Spohn. (Z. B.) Fortsetzung . . 501



**Promovierte Physikerin**

sucht Anfangsstellung in industriellem Betrieb (Elektrotechnik oder Optik). Zuschriften unter **S. H. 569** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel) in Leipzig, Königstraße 2, erbeten.

**Richard Müller-Uri,** Braunschweig, Schleinitzstr. 19

**Physikalische, chemische und meteorologische Unterrichts-Apparate und -Utensilien. — Glastechnische Präzisionsarbeiten.**

**Neuheiten:** **Coulombmeter** nach Stephan D.R.G.M. — Righis **Röhren für magnetische Strahlen** mit Vakuum-Regulierung D.R.G.M. — **Quecksilber-Schnellpumpe. — Präzisions-Vakuometer** D.R.G.M. — **Pizzarello-Apparat. — Apparate für flüssige Luft. — Verflüssigte Gase in Röhren. — Projektions- und Extrem-Thermometer. — Elektroskope** und **Trockensäulen. — Vakuumröhren** nach Braun, Crookes Geißler, Puluj, Lecher, Röntgen, Wehnelt. — **Leuchtschirme. — Normal-Geißlerröhren-Serie** „Kompendium". — **Original-Vakuumskalen** nach Croß.

Neuste Konstruktion!

*Kugelepiskop. D.R.P. 250314.*

**Franz Schmidt & Haensch**

**Berlin S. 42,** Prinzessinnenstraße 16

**Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.**

**Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.**

Preislisten kostenlos.